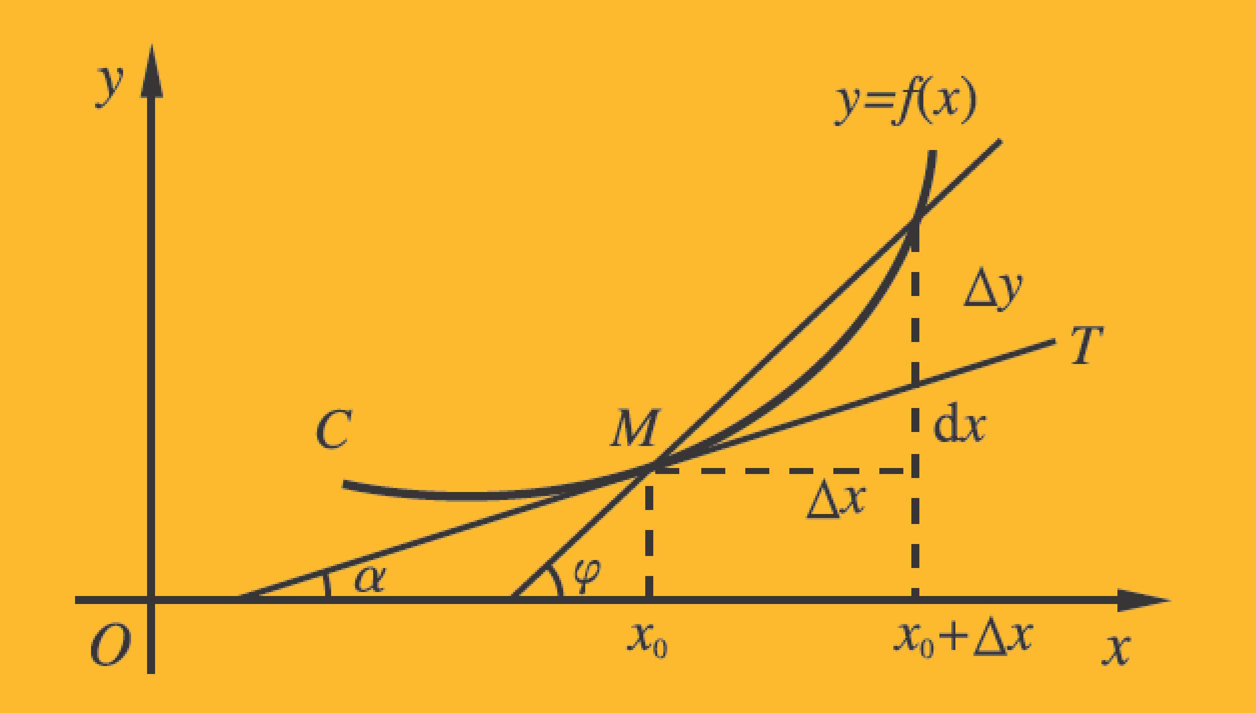
普通高等教育“十三五”规划教材

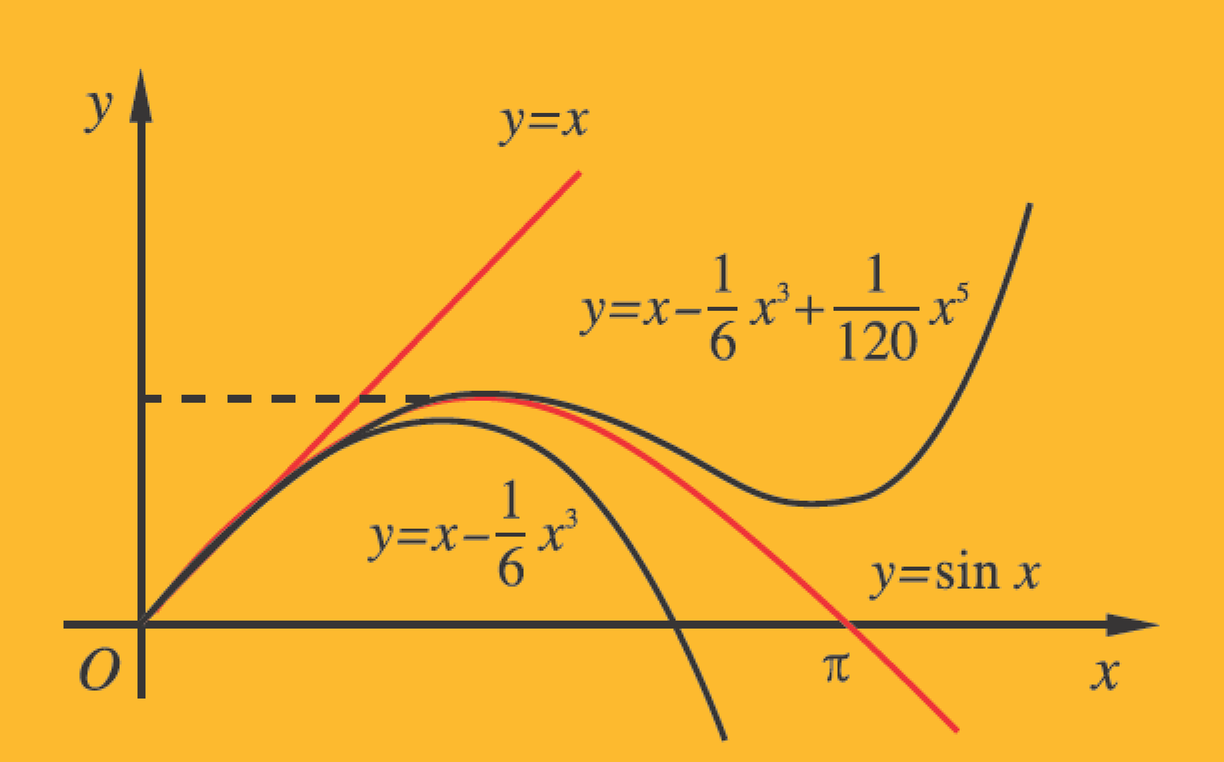
大学数学基础丛书
丛书主编　袁学刚　周文书　刘　满

微积分学习指导

（上册）

王金芝　齐淑华　主编





清华大学出版社

大学数学基础丛书

微积分学习指导

（上册）

王金芝　齐淑华　主编

清 华 大 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本学习指导是与我们编写的教材《微积分》配套辅导用书.书中按教材章节顺序编排,与教材保持一致.全书共5章,每章又分4个板块,即大纲要求与重点内容、内容精要、题型总结与典型例题、课后习题解答,以起到同步辅导的作用,帮助学生克服学习中遇到的困难.

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导.上册 / 王金芝,齐淑华主编.—北京:清华大学出版社,2018
(大学数学基础丛书)
ISBN 978-7-302-51396-4

Ⅰ.①微…　Ⅱ.①王…②齐…　Ⅲ.①微积分－高等学校－教学参考资料　Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第228433号

责任编辑:刘　颖
封面设计:傅瑞学
责任校对:刘玉霞
责任印制:董　瑾

出版发行:清华大学出版社
　　网　　址:http://www.tup.com.cn,http://www.wqbook.com
　　地　　址:北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**:100084
　　社 总 机:010-62770175　　**邮　　购**:010-62786544
　　投稿与读者服务:010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质量反馈:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者:北京嘉实印刷有限公司
经　　销:全国新华书店
开　　本:185mm×260mm　**印　张**:15.25　　**字　　数**:488千字
版　　次:2018年12月第1版　　**印　　次**:2018年12月第1次印刷
定　　价:36.00元

产品编号:077724-01



本学习指导是与我们编写的教材《微积分》配套的辅导用书.

微积分是高等院校的重要基础课之一,它不仅是后续课程学习及在各个学科领域中进行研究的必要基础,而且对学生综合能力的培养起着重要的作用,同时更是考研数学试题的重要组成部分.为更好地指导学生学好这门课程,加深学生对所学内容的理解和掌握,提高其综合运用知识解决问题的能力,我们组织编写此书. 本书按教材章节顺序编排,与教材保持一致.全书共5章,每章又分4个板块,即大纲要求及重点内容、内容精要、题型总结与典型例题、课后习题解答,对现行教材逐章逐节同步辅导. 各板块具有以下特点:

1. 大纲要求及重点内容部分列出了国家教学大纲对本章内容的基本要求,帮助同学们明确本章应该掌握的数学概念及相关知识.

2. 内容精要部分对每章的内容都给出了简明的摘要,用以帮助读者理解和记忆本书中的主要概念、结论和方法,对本章有一个全局性的认识和把握.

3. 题型总结与典型例题部分,选取了近几年的考研题和竞赛题作为例题,并进行了详细的解答.每种题型的解法都具有代表性.读者可以通过典型例题既对这部分知识消化理解,掌握了常见的解题方法与技巧,又扩充了知识面,同时也做到举一反三,触类旁通.

4. 课后习题解答部分,是对《微积分》一书的课后习题的详细解答,用以帮助读者在完成课后习题遇到困难时参考、查阅.对于课后习题,希望读者在学习过程中,先独立思考,自己动手解题,然后再对照检查,不要依赖于解答.

本书既是大学本科学生学习微积分有益的参考用书,又是有志考研同学的良师益友,相信通过对本书的系统阅读,会对学好微积分有很大帮助.

本书由大连民族大学理学院组织编写,由王金芝、齐淑华主编,参加编写的有刘强、张誉铎、李娇.理学院领导和同事们对本书的编写提出了宝贵的意见和建议,在此表示感谢.

由于作者水平有限,难免有疏漏、不足或错误之处,敬请同行和广大读者指正.

编　者

2018年6月


目
录
CONTENTS

第 1 章

函数、极限和连续

1.1 大纲要求及重点内容

1. 大纲要求

(1) 理解函数的定义，掌握函数定义的两个要素，会求函数的定义域，值域及函数值.

(2) 加深对函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性等函数基本性质的了解，会判断函数的奇偶性、单调性，熟记一些常见的有界函数和周期函数.

(3) 了解反函数的概念，会求反函数. 理解复合函数的概念，会进行函数的复合运算和复合步骤的分解.

(4) 掌握基本初等函数的函数关系式、定义域和值域、性质和图像. 理解初等函数的概念，了解分段函数的概念及相关问题.

(5) 会建立简单物理、经济等实际问题中的函数关系式，掌握一些常见的经济函数.

(6) 理解极限的概念，会用两个重要极限求极限.

(7) 了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念，会用等价无穷小代换求极限.

(8) 理解函数在一点连续和在一个区间上连续的概念. 了解函数间断点的概念，会判断间断点的类型；了解初等函数的连续性，会讨论简单初等函数和分段函数的连续性问题.

(9) 了解闭区间上连续函数的性质，会用介值定理证明简单的命题.

2. 重点内容

(1) 复合函数、反函数、分段函数、函数记号的运算、基本初等函数及其图像、初等函数的概念.

(2) 准确理解极限的概念、性质和极限存在的条件，求出各种极限.

(3) 比较无穷小的阶，用等价无穷小代换求极限.

(4) 判断函数的连续性及间断点的类型.

(5) 利用零点存在定理证明方程根的存在性.

1.2 内容精要

1. 函数

(1) 函数的概念

① **函数** 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的对应法则 f 总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. x 叫做自变量，y 叫做因变量，数集 D 叫做这个函数的定义域.

一个函数当它的定义域及对应法则确定后，这个函数就确定了，所以，定义域和对应法则称为函数的**两要素**.

注：两个函数的定义域及对应法则相同，则这两个函数相同，而与自变量用什么表示无关. 如 $y=\sin x$ 与 $y=\sin t$ 是相同的函数.

② **定义域** 函数的定义域就是使函数 $y=f(x)$ 有意义的自变量 x 的全体取值所组成的集合，记作 $D(f)$. 在实际问题中，函数的定义域往往由问题的实际意义来确定.

(2) 函数的基本性质

① **有界性** 设数集 X 是函数 $f(x)$ 的定义域的一个子集. 如果存在常数 M，使得：

- 对于任意 $x\in X$，有不等式 $f(x)\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有上界**.
- 对于任意 $x\in X$，有不等式 $f(x)\geqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有下界**.
- 对于任意 $x\in X$，有不等式 $|f(x)|\leqslant M$（这里 $M>0$）成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**.
- 若对任意的 $M>0$，都存在 $x\in X$，有 $|f(x)|\geqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**.

注 有界函数 $f(x)$ 在 X 上的图像夹在两条平行线 $y=M$，$y=-M$ 之间.

② **单调性** 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，对于 I 内任意两点 x_1,x_2，若：

- 当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 内是单调增加的.
- 当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 内是单调减少的.

注 单调增加函数的图像从左往右是上升的；单调减少函数的图像从左往右是下降的.

③ **奇偶性** 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果：

- 对于任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；
- 对于任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

注 奇函数的图像关于原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称.

④ **周期性** 对于函数 $f(x)$，如果存在一个不为零的数 T，使得对于定义域内的任何 x，$x\pm T$ 仍在定义域内，且关系式 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数. T 称为它的一个周期.

注 函数的周期是指它的最小正周期；周期为 T 的周期函数的图像，在长度为 T 的任何区间上有相同的形状.

(3) 复合函数

若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 在数集 D_2 上有定义，对应的值域 $W_2=\{u\,|\,u=\varphi(x),x\in D_2\}$，并且 $W_2\subset D_1$，那么对于每个数值 $x\in D_2$，有确定的数值 $u\in W_2$ 与 x

值对应.由于这个值 u 也属于函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_1,因此有确定的值 y 与值 u 对应,这样对于每个数值 $x\in D_2$,通过 u 有确定的数值 y 与 x 对应,从而得到一个以 x 为自变量,y 为因变量的函数,这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,记作 $y=f[\varphi(x)]$,而 u 称为中间变量.

注 不是任意两个函数都能复合成一个复合函数的.复合函数可以有多个中间变量.

将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$ 中的运算就是函数的复合运算;从复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 中分解出 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的运算就是分解复合步骤的运算.

函数的复合运算是不同于函数的四则运算及其他运算的一种独特的运算,它具有内层函数与外层函数环环相扣的所谓“函数的函数”这样一个特征,所以分清中间变量与自变量是理解和解决复合函数问题的关键,对于一元函数和多元函数都是如此.

(4) 反函数

设 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,对应的函数值集合为 $Y=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$,如果对于每个数 $y\in Y$,按照对应法则 $f(x)=y$,在 I 中有唯一的数 x 与 y 对应,则称这样得到的函数为 $y=f(x)$ 在区间 I 上的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$,或按字母使用习惯记为 $y=f^{-1}(x)$.而 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

注 反函数定义域和值域与直接函数的值域和定义域对应相等.互为反函数的两个函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(5) 基本初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

(6) 初等函数

由常数及基本初等函数经过有限次四则运算及有限次的复合步骤所构成,并且可以用一个式子表示的函数,叫做初等函数.是否为初等函数主要取决于函数中的运算是否为四则运算和复合运算,并且运算的次数是否为有限次.

(7) 分段函数

在定义域的不同部分用不同的解析式来表示的函数就是分段函数.由于分段函数是一个函数,所以它的定义域是各段定义域的并集.讨论分段函数时,还要特别注意在相邻两段分段点处函数是如何定义的.

(8) 常见的经济函数

收入函数 $R=R(x)$,成本函数 $C=C(x)$,利润函数 $L=L(x)=R(x)-C(x)$,需求函数 $x=x(P)$,供应函数 $Q=Q(P)$ 都是常见的经济函数,其中 x 表示产(销)量,P 表示价格,每个具体的经济函数要根据实际的经济问题来确定.

2. 极限

(1) 数列极限、函数极限定义(略)

(2) 无穷小与无穷大

无穷小 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$(或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$),就称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时为无穷小.

注 ① 无穷小是以 0 为极限的变量.

② 说到无穷小,必须指明自变量的变化过程.

③ 无穷小与绝对值很小的数不能混为一谈.

④ 零是唯一可以作为无穷小的常数.

无穷大

① 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$,则称函数 $f(x)$当 $x\to x_0(x\to\infty)$时为无穷大.

② 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty$,则称函数 $f(x)$当 $x\to x_0(x\to\infty)$时为正无穷大.

③ 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty$,则称函数 $f(x)$当 $x\to x_0(x\to\infty)$时为负无穷大.

注　① 无穷大是变量.

② 说到无穷大,必须指明自变量的变化过程.

③ 无穷大与绝对值很大的数不能混为一谈.

等价无穷小代换　若 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$,且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在,则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

这表明,求两个无穷小之比的极限时,可以用等价无穷小来代替.

(3) 函数的连续性

① 连续的定义

定义 1　记 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,称为 $f(x)$在 x_0 的增量,若$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,则称 $f(x)$在 x_0 处连续.

定义 2　设 $f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义,若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$在 x_0 处连续,x_0 称为 $f(x)$的连续点.

注　①连续函数的图像是一条连续不间断的曲线.②一般的证明性命题用函数连续的第一个定义较方便;判断函数在某点连续,尤其是判断分段函数在分段点处是否连续用定义 2 较方便.

② 单侧连续

- 若 $f(x)$在点 x_0 的某个左邻域内有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$在 x_0 点左连续;
- 若 $f(x)$在点 x_0 的某个右邻域内有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$在 x_0 点右连续.

$f(x)$在 x_0 点连续的充要条件是 $f(x)$在 x_0 点既左连续,又右连续,即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0).$$

区间上连续　若函数 $f(x)$在开区间(a,b)内每一点处都连续,则称 $f(x)$在(a,b)内连续;若 $f(x)$在(a,b)内连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$,$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$,则称 $f(x)$在$[a,b]$上连续.

③ 间断点

定义　若 $f(x)$在 x_0 处出现以下 3 种情形之一:

- $f(x)$在 x_0 处无定义;
- $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在;

• $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$，

则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处间断，称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

间断点的类型 设 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

第一类间断点 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在，x_0 称为 $f(x)$ 的第一类间断点. 第一类间断点分为可去与跳跃两类：

• 可去间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在且**相等**.

• 跳跃间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在但**不相等**.

第二类间断点 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 中至少有一个不存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

• 无穷间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 中至少有一个极限为无穷大.

• 振荡间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 中至少有一个极限不存在且振荡.

3. 重要公式和定理

（1）重要公式

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，　$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

推广 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$，　$\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$，　$\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$.

② **抓大头公式** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m}{b_0x^n}=\begin{cases}\infty, & m>n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m<n,\end{cases}$ $m,n>0$.

何谓“抓大头”，即分子分母都抓最大那一项，同一数量级的认为不能忽略.

③ 常用极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$；　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；　$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0(|q|<1)$；　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0(a>0)$；

$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$；　$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=\infty$；

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$；　$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{x}}=0$；　$\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$；　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^p}{a^x}=0(a>0,p>0)$；

$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$；　$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$；　$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{arccot}\,x=\pi$；　$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{arccot}\,x=0$.

④ **无穷小的比较** 设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha(x)=0$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\beta(x)=0$.

若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\begin{cases}0, & \text{则称 }\alpha(x)\text{ 是 }\beta(x)\text{ 的高阶无穷小，记为 }\alpha(x)=o(\beta),\\ \infty, & \text{则称 }\alpha(x)\text{ 是 }\beta(x)\text{ 的低阶无穷小，}\\ C(C\neq 0), & \text{则称 }\alpha(x)\text{ 是 }\beta(x)\text{ 的同阶无穷小，}\\ 1, & \text{则称 }\alpha(x)\text{ 是 }\beta(x)\text{ 的等价无穷小，记为 }\alpha(x)\sim\beta(x).\end{cases}$

若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=C(C\neq 0)$，$k>0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

⑤ **无穷小的阶的运算法则**

若 $x\to 0$,则:

- $m>n, o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^n), o(x^n)\pm o(x^n)=o(x^n)$;
- $o(kx^n)=o(x^n)$;
- $x^m o(x^n)=o(x^{m+n})$;
- 若 $\varphi(x)$有界时,则 $\varphi(x)o(x^n)=o(x^n)$;
- $o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$.

⑥ **关于等价无穷小**

- 当 $x\to 0$ 时,$x^n+x^m\sim x^{\min\{m,n\}}$;
- 当 $\varphi(x)\to 0$ 时,$\varphi(x)+o(\varphi(x))\sim\varphi(x)$.

例如,当 $x\to 0$ 时,$x^3=o(3x)$,则 $x^3+3x\sim 3x$;$1-\cos x=o(x)$,则 $x+(1-\cos x)\sim x$.

- 当 $x\to 0$ 时

$\sin x\sim x$, $\tan x\sim x$, $\arcsin x\sim x$, $\arctan x\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$,

$e^x-1\sim x$, $a^x-1\sim x\ln a$, $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$, $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

当 $x\to 0^+$ 时,$x^x-1=e^{x\ln x}-1\sim x\ln x$.

当 $x\to 1$ 时,$\ln x\sim x-1$.

- 推广 将上面的 x 都换成 $\varphi(x)$等价仍成立,即当 $\varphi(x)\to 0$ 时

$\sin\varphi(x)\sim\varphi(x)$, $\tan\varphi(x)\sim\varphi(x)$, $\arcsin\varphi(x)\sim\varphi(x)$, $\arctan\varphi(x)\sim\varphi(x)$,

$a^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x)\ln a$, $\ln(1+\varphi(x))\sim\varphi(x)$, $e^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x)$,

$(1+\varphi(x))^\alpha-1\sim\alpha\varphi(x)$, $1-\cos\varphi(x)\sim\frac{1}{2}\varphi(x)^2$.

当 $\varphi(x)\to 1$ 时,$\ln\varphi(x)\sim\varphi(x)-1$.

- 更进一步的等价我们也经常用,求极限时更简便(由第3章的泰勒公式可推导下面的等价关系).

当 $x\to 0$ 时

$\sin x-x\sim-\frac{1}{6}x^3$; $\arcsin x-x\sim\frac{1}{6}x^3$;

$\tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3$; $\arctan x-x\sim-\frac{1}{3}x^3$;

$\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$; $e^x-1-x\sim\frac{1}{2}x^2$; $\ln(1+x)-x\sim-\frac{1}{2}x^2$.

将上面的 x 都换成 $\varphi(x)$等价关系仍成立.

⑦ 求两个无穷小比的极限时,可用等价无穷小的代换

设 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$,且 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$存在,则 $\lim\frac{\beta}{\alpha}$也存在,且 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$.

这是因为 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\left(\frac{\beta}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha}\right)=\lim\frac{\beta}{\beta'}\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\lim\frac{\alpha'}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$.

在求无穷小比的极限,而分子或分母为两个无穷小的和或差时,可用等价无穷小代换:设 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$,若:

$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} \neq 1$，则在求极限时可用等价无穷小代换 $\alpha-\beta \sim \alpha'-\beta'$；

$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} \neq -1$，则在求极限时可用等价无穷小代换 $\alpha+\beta \sim \alpha'+\beta'$.

例如，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x-\sin x}{\ln(1+5x)-(e^x-1)}$. 因为

$$\tan 3x \sim 3x, \sin x \sim x, \ln(1+5x) \sim 5x, e^x-1 \sim x,$$

且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3\neq 1$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{x}=5\neq 1$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x-\sin x}{\ln(1+5x)-(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-x}{5x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{4x}=\frac{1}{2}.$$

(2) 数列极限的性质及判定

收敛数列的性质：

① 若 $\{x_n\}$ 收敛，则其极限唯一；

② 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 有界，其逆不真.

收敛数列的判别法：

① 单调有界数列 $\{x_n\}$ 必有极限；

② 夹逼定理　设存在自然数 N，当 $n>N$，恒有 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=l$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=l$.

(3) 函数极限的重要定理

定理 1(常用于判别函数的连续性)　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

定理 2(常用于极限的证明或计算中)　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

定理 3(函数极限的保号性定理)　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$A>0$(或 $A<0$)，则存在一个 $\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$，$x\neq x_0$ 时，$f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

定理 4(函数极限的保号性定理的逆定理)　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$f(x)>0$(或 $f(x)<0$)则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

定理 5(夹逼准则，常用于求极限)　设在 x_0 的邻域内，恒有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant \psi(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

定理 6(无穷小的运算性质及规律)

① 有限个无穷小的代数和仍为无穷小；

② 有限个无穷小的乘积仍为无穷小；

③ 有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小；

④ $\lim f(x)g(x)=A$ 且 $\lim g(x)=\infty$，则 $\lim f(x)=0$；

⑤ $\lim \frac{f(x)}{g(x)}=A$ 且 $\lim g(x)=0$，则 $\lim f(x)=0$.

定理 7(无穷小与无穷大的关系定理)　在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大；反之，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

定理 8(**初等函数的连续性**) 初等函数在其定义域子区间上连续.

定理 9(**闭区间上连续函数的性质**)

① (**连续函数的有界性**)若函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则 $f(x)$在$[a,b]$上有界;

② (**最值定理**)若函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则在$[a,b]$上 $f(x)$能取得最大值与最小值;

③ (**介值定理**)若函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且 μ 介于 $f(a)$,$f(b)$之间,则在$[a,b]$上存在 ξ 使得 $f(\xi)=\mu$;

④ (**零点存在定理或根的存在定理**)若函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则在(a,b)内至少存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=0$.

1.3 题型总结与典型例题

重点题型 1.求函数的极限;2.无穷小的比较与阶的确定;3.极限中常数的确定;4.判断函数的连续性及间断点的类型,特别是分段函数在分段点处的连续性;5.闭区间上连续函数的零点定理和介值定理.

1. 函数及其性质

题型 1-1 函数的定义域

【解题思路】 求函数的定义域时,一般要根据分母不为零,负数不能开偶次方、负数和零无对数,$k\pi$ 无余切,$k\pi\pm\frac{\pi}{2}$无正切,以及绝对值大于 1 时无反正弦和反余弦等原则列出不等式(组),求得其解即为所求函数的定义域.

例 1.1 求函数 $f(x)=\lg(4-x)+\sqrt{x^2+3x-10}$的定义域.

解 依题意$\begin{cases}4-x>0,\\x^2+3x-10\geqslant 0,\end{cases}$解之得 $2\leqslant x<4$,即函数的定义域为$\{x\mid 2\leqslant x<4\}=[2,4)$.

例 1.2 设 $f(x)$的定义域为$[0,3]$,求 $g(x)=f(\tan^2 x)$的定义域.

解 因为 $f(x)$的定义域为$[0,3]$,所以 $0\leqslant\tan^2 x\leqslant 3$,由 $\tan^2 x\leqslant 3$,得到$-\sqrt{3}\leqslant\tan x\leqslant\sqrt{3}$,因而 $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\tan x\leqslant\tan\frac{\pi}{3}$.

由 $\tan x$ 的周期性,得 $g(x)$的定义域为$\left\{x\,\middle|\,k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}\right\}$.

例 1.3 函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,求 $f(a+x)+f(a-x)(a>0)$的定义域.

解 因为函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,故函数 $f(a+x)+f(a-x)$的 x 应满足

$$\begin{cases}0\leqslant a+x\leqslant 1,\\0\leqslant a-x\leqslant 1,\end{cases}\quad\text{解得}\quad\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\a-1\leqslant x\leqslant a.\end{cases}$$

因为 $a>0$,所以有$-a<a$. 当 $a-1\leqslant 1-a$ 时,上面的不等式组有解,否则无解,即当 $0<a\leqslant 1$ 时,不等式组有解.

当$-a\leqslant a-1$,即$\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$ 时,不等式组的解如图 1-1(a)所示,函数的定义域为$[a-1,$

$1-a]$. 当 $-a \geqslant a-1$，即 $a \leqslant \frac{1}{2}$ 时，不等式组的解如图 1-1(b)所示，函数的定义域为 $[-a, a]$.

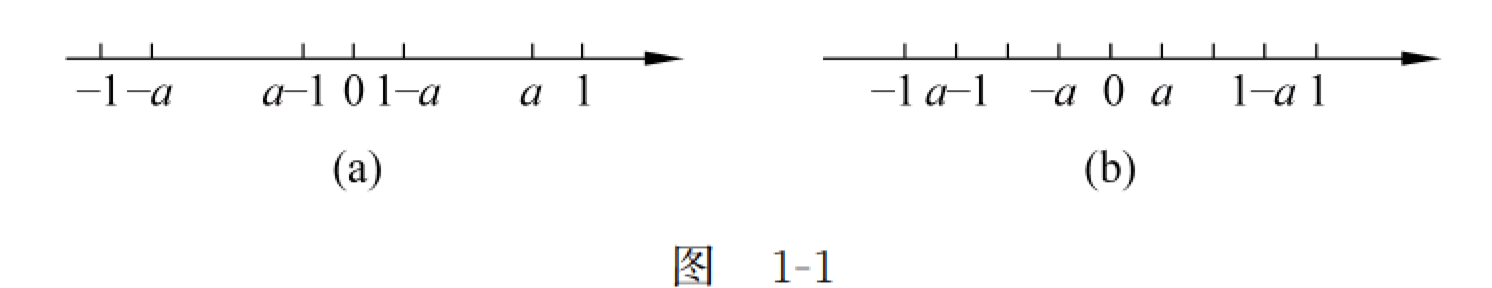


图 1-1

题型 1-2 函数概念的理解

【解题思路】 函数关系式的确定只取决于函数的定义域和函数对应关系，定义域和对应法则相同表示同一函数.

例 1.4 (1) 函数 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ 与 $g(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$ 是否为同一函数.

(2) 函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 是否为同一函数.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases} 3^x, & x\geqslant 1, \\ \arcsin x, & -1<x<1, \\ 1+x, & x\leqslant -1, \end{cases}$ 求 $f(-3)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(2)$.

解 (1) 是. 由于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域都是 $-1<x<1$，对应法则也相同，所以它们是同一函数.

(2) 不是. 虽然 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，但它们的对应法则不一样，所以它们不是同一函数.

(3) $f(-3)=1+(-3)=-2$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$，$f(2)=3^2=9$.

题型 1-3 函数的简单性态的判别

【解题思路】 函数的奇偶性和周期性是在定义域上讨论的，而单调性和有界性是在有定义的某区间上讨论的.

例 1.5 设 $f(x)=\frac{x^2+3}{x^2+5}$，证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

证明 因为 $|f(x)|=\left|\frac{x^2+3}{x^2+5}\right|\leqslant 1+\left|\frac{2}{x^2+5}\right|\leqslant 1+\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$，所以 $f(x)=\frac{x^2+3}{x^2+5}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

例 1.6 证明函数 $y=\frac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty,1)$ 内单调增加.

证明 任取 $x_1,x_2\in(-\infty,1)$，不妨设 $x_1<x_2$，则有

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1-x_1}-\frac{x_2}{1-x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}<0\text{，即 } f(x_1)<f(x_2)\text{，}$$

故函数 $y=\frac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty,1)$ 内单调增加.

例 1.7 设 $f(x)$ 是周期为 6 的奇函数，且 $f(x)=x^2-2x \quad x\in[0,3]$，求 $f(11)$.

解 $f(11)=f(5+6)=f(5)=f(-1+6)=f(-1)=-f(1)=-(1^2-2\times 1)=1$.

题型 1-4 求复合函数

【解题思路】 函数的复合运算是不同于函数的四则运算及其他运算的一种独特运算，它具有内层函数与外层函数环环相扣的所谓“函数的函数”这样一种特征，所以分清中间变量与自变量是理解和解决复合函数问题的关键.

例 1.8 将下列函数拆开成若干基本初等函数：

(1) $y=\sin^3(1+2x)$；　　(2) $y=10^{(2x-1)^2}$.

解 (1) $y=u^3, u=\sin v, v=1+2x$；　　(2) $y=10^u, u=v^2, v=2x-1$.

例 1.9 设 $y=f(u)=\arctan u, u=\varphi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}, t=\phi(x)=x^2-1$，求 $f\{\varphi[\phi(x)]\}$.

解 由题意得 $\varphi(\phi(x))=\dfrac{1}{\sqrt{\phi(x)}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$，故 $f\{\varphi[\phi(x)]\}=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

例 1.10 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

解 因为 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$，令 $u=x+\dfrac{1}{x}$，则 $f(u)=u^2-2$，故 $f(x)=x^2-2$.

题型 1-5 分段函数

【解题思路】 讨论分段函数时，要注意自变量变化的每一段上的函数关系.

例 1.11 设分段函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0,\\ x^2+\ln x, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(1-x), f(x-1)$.

解 $f(1-x)=\begin{cases}\sin(1-x), & 1-x\leqslant 0,\\ (1-x)^2+\ln(1-x), & 1-x>0,\end{cases}$ 即

$$f(1-x)=\begin{cases}\sin(1-x), & x\geqslant 1,\\ (1-x)^2+\ln(1-x), & x<1.\end{cases}$$

类似地 $f(x-1)=\begin{cases}\sin(x-1), & x\leqslant 1,\\ (x-1)^2+\ln(x-1), & x>1.\end{cases}$

2. 数列的极限

题型 1-6 收敛数列的性质

【解题思路】 收敛的数列极限唯一；收敛的数列有界；收敛数列具有保号性；收敛数列的任何子列都收敛并具有相同的极限. 有界数列不一定收敛；无界数列一定发散. 收敛数列与发散数列的和发散；两个发散数列的和可能收敛也可能发散；收敛数列(极限不为零)与发散数列的积发散.

例 1.12 选择题

(1) 数列收敛是数列有界的(　　).

A. 必要条件　　B. 充分条件　　C. 充要条件　　D. 无关条件

(2) 下列数列中收敛的是(　　).

A. $\{n\}$　　B. $\{(-1)^n\}$　　C. $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$　　D. $\{\sin n\}$

解 (1) 选 B； (2) 选 C.

题型 1-7 含根式差的极限计算

【解题思路】 凡函数的表达式中含有 $a+\sqrt{b}$(或$\sqrt{a}+\sqrt{b}$)，则在运算前通常要在分子分母乘以其共轭根 $a-\sqrt{b}$(或$\sqrt{a}-\sqrt{b}$)，反之亦然，然后再做有关的运算.

例 1.13 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)$； (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sin(\pi\sqrt{n^2+n})\right|$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]$ (先求根号下的和)

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\right] \quad \text{(分子有理化)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2n}{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}} \quad \text{(抓大头)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)=\lim_{n\to\infty}\sin[(\sqrt{n^2+1}\pi-n\pi)+n\pi]$$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}\pi-n\pi) \quad \text{(分子有理化)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} \quad \text{(等价无穷小代换)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0.$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\left|\sin(\pi\sqrt{n^2+n})\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\sin(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi+n\pi)\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\sin(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)\right|$$

$$=\left|\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\pi\right)\right|=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

题型 1-8 单调有界必有极限证明数列极限的存在性，并求之，适用于 $x_{n+1}=f(x_n)$.

【解题思路】 由递推关系 $x_{n+1}=f(x_n)$定义的数列的极限问题，一般用单调有界必有极限.解题步骤：(1)直接对通项进行分析或用数学归纳法验证数列$\{x_n\}$单调有界；(2)设$\{x_n\}$的极限存在，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，将其代入给定的 x_n 的表达式中，则该式变为 l 的代数方程，解之得该数列的极限.

证明数列$\{x_n\}$单调性的常用方法：

(1) 计算差 $d_n=x_{n+1}-x_n$，若 $d_n\leqslant 0$(或 $d_n\geqslant 0$)，则$\{x_n\}$单调减少(增加)；

(2) 若 $x_n>0$，计算商 $r_n=\frac{x_{n+1}}{x_n}$，若 $r_n\leqslant 1$（或 $r_n\geqslant 1$），则 $\{x_n\}$ 单调减少（增加）；

(3) 用数学归纳法证明之；

(4) 记 $x_n=f(n)$，若 $f(x)(x\geqslant 1)$ 可导，则 $f'(x)\leqslant 0$（或 $f'(x)\geqslant 0$）时，$\{x_n\}$ 单调减少（增加）.

例 1.14 设 $x_1=\sqrt{a}$，$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$ $(a>0)(n=1,2,\cdots)$，试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限.

证明 用数学归纳法证明数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

由 $x_1=\sqrt{a}$，$x_2=\sqrt{a+x_1}>\sqrt{a}=x_1$，知 $x_1<x_2$，即 $n=1$ 时，有 $x_n<x_{n+1}$. 设 $n=k$ 时，不等式 $x_n<x_{n+1}$ 成立. 由 $x_{k+1}=\sqrt{a+x_k}<\sqrt{a+x_{k+1}}=x_{k+2}$ 可知，$n=k+1$ 时，不等式 $x_n<x_{n+1}$ 也成立，因而对一切的自然数时，不等式 $x_n<x_{n+1}$ 总成立.

又 $x_1=\sqrt{a}<\sqrt{a}+1$. 设 $n=k$ 时，$x_k<\sqrt{a}+1$，则当 $n=k+1$ 时，有

$$x_{k+1}=\sqrt{a+x_k}<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{a+2\sqrt{a}+1}=\sqrt{(\sqrt{a}+1)^2}=\sqrt{a}+1.$$

可知 $\{x_n\}$ 有界，由单调有界准则可知原数列有极限.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，等式 $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$ 两边取极限得 $l=\sqrt{a+l}$，即 $l=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$ $\left(l=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4a})\text{，与题意不符，舍去}\right)$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$.

例 1.15 设 $x_0>0$，$x_n=\frac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}}(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求之.

证明 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 注意到对于一切的 n 恒有

$$x_n=1+\frac{x_{n-1}}{2+x_{n-1}}>1,\quad x_n=2-\frac{2}{2+x_{n-1}}<2,$$

因此知数列 $\{x_n\}$ 有界. 又

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n&=\left(2-\frac{2}{2+x_n}\right)-\left(2-\frac{2}{2+x_{n-1}}\right)\\&=2\left(\frac{1}{2+x_{n-1}}-\frac{1}{2+x_n}\right)=\frac{2(x_n-x_{n-1})}{(2+x_{n-1})(2+x_n)},\end{aligned}$$

故得

$$x_n-x_{n-1}=\frac{2(x_{n-1}-x_{n-2})}{(2+x_{n-2})(2+x_{n-1})},\cdots,x_2-x_1=\frac{2(x_1-x_0)}{(2+x_0)(2+x_1)}.$$

于是可知 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_1-x_0 同号，故当 $x_1>x_0$ 时，数列 $\{x_n\}$ 单调递增；当 $x_1<x_0$ 时，数列 $\{x_n\}$ 单调递减. 也就是说，数列 $\{x_n\}$ 为单调有界数列，故此单调有界数列必有极限.

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则

$$a=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}}=\frac{2(1+a)}{2+a},$$

解之得 $a=\sqrt{2}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

例 1.16 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1>0$，$x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.（2018 数三）

证明 (1) 有界性. 由 $x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$ 得 $e^{x_{n+1}}=\frac{e^{x_n}-1}{x_n}$，即 $x_{n+1}=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}$，从而 $x_2=\ln\frac{e^{x_1}-1}{x_1}$.

设 $f(x)=e^x-1-x$，则 $f'(x)=e^x-1>0(x>0)$ 且 $f(0)=0$，所以 $f(x)$单调递增，当 $x>0$时，$f(x)>f(0)=0$，即 $e^x-1>x(x>0)$，于是$\frac{e^x-1}{x}>1$，故$\frac{e^{x_1}-1}{x_1}>1$，即 $x_2=\ln\frac{e^{x_1}-1}{x_1}>0$，从而$\forall n\in\mathbf{N}$，$x_n>0$.

单调性. $x_{n+1}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}-\ln e^{x_n}=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n e^{x_n}}$.

令 $g(x)=e^x-1-xe^x$，则 $g'(x)=-xe^x<0(x>0)$，所以 $g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减，当 $x>0$ 时，$g(x)<g(0)=0$，从而有 $e^x-1<xe^x$，即$\frac{e^x-1}{xe^x}<1$，于是

$$x_{n+1}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n e^{x_n}}<0,$$

故$\{x_n\}$单调递减. 于是$\{x_n\}$单调递减有下界，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

(2) 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $ae^a=e^a-1$，解得 $a=0$. 故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

例 1.17 已知 $a>0$，$x_1>0$，定义

$$x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3x_n+\frac{a}{x_n^3}\right),\quad n=1,2,\cdots.$$

求证：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

解 第一步：证明数列$\{x_n\}$的极限存在.

注意到，当 $n\geqslant 2$ 时，$x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(x_n+x_n+x_n+\frac{a}{x_n^3}\right)\geqslant\sqrt[4]{x_nx_nx_n\frac{a}{x_n^3}}=\sqrt[4]{a}$，因此数列$\{x_n\}$有下界. 又$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{4}\left(3+\frac{a}{x_n^4}\right)\leqslant\frac{1}{4}\left(3+\frac{a}{a}\right)=1$，即 $x_{n+1}\leqslant x_n$，所以$\{x_n\}$单调递减，由极限存在准则知，数列$\{x_n\}$有极限.

第二步：求数列$\{x_n\}$的极限.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则有 $A\geqslant\sqrt[4]{a}>0$. 由$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\frac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\left(3x_n+\frac{a}{x_n^3}\right)$，有 $A=\frac{1}{4}\left(3A+\frac{a}{A^3}\right)$，解得 $A=\sqrt[4]{a}$（舍掉负根），即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt[4]{a}$.

题型 1-9 无限项之和的极限

无限项之和的项数自然随着项数变化而变化，因此不能用和的极限运算法则. 求这类极限的关键是使和的项数不随项数的变化而变化，将和化为有限且易求其极限的形式.

【解题思路一】 先求和，再求极限.

求和时，常用下述求和公式：

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\text{等差数列的前 } n \text{ 项和 } S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2},$$

$$\text{等比数列的前 } n \text{ 项和 } S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

例 1.18 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$.

解 本题考虑无穷多个无穷小之和.先求和再求极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

例 1.19 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}\right)$.

解
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{2}+\frac{1}{\frac{2(1+2)}{2}}+\frac{1}{\frac{3(1+3)}{2}}+\cdots+\frac{1}{\frac{n(1+n)}{2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{2}+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\cdots+\frac{2}{n(1+n)}\right)$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(1+n)}\right)$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{1+n}\right)$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+n}\right)=2.$$

【解题思路二】 裂项相消法(部分分式法)

分解和式中的各项,使前后两项相消,将 n 项的和式简化成只含两项的和式.

常用的裂项方法,有

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1},\qquad \frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right),$$

$$\frac{1}{(ak)^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ak-1}-\frac{1}{ak+1}\right),\qquad \frac{n}{(n+1)!}=\frac{n+1-1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!},$$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right].$$

例 1.20 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{n}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

解 将和式中各项分解成两项之差.

$$\frac{1}{1\times2\times3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right),\qquad \frac{1}{2\times3\times4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right),$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$

将上式各项相加得

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{n}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right],$$

原极限$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{1}{4}$.

例 1.21 设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)$

$$=\left(1-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=1-\frac{1}{(n+1)!},$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)!}\right)=1.$$

例 1.22 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)}-\frac{1}{(2n+1)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

【解题思路三】 夹逼准则 若存在正整数 N，当 $n>N$ 时有 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

n 项按递增或递减排列的数列，一般利用夹逼准则求极限.

使用这个准则的关键在于：根据$\{x_n\}$通项表达式的特点，利用常用的放缩技巧，找出符合定理条件的数列$\{y_n\}$和$\{z_n\}$，即$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n$ 存在且相等.

常用的放缩技巧如下：

(1) 若干个整数乘积中，大于 1 的因子略去则缩小，小于 1 的因子略去则放大；

(2) 分子分母同为整数，分母缩小，此数则放大，分母放大，此数则缩小；

(3) n 个正数之和可放大为(不超过)最大数乘 n，可缩小为(不小于)最小数乘 n 或最大数.

例 1.23 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$.

解 设 $x_n=\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$，极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 是无限多项和的极限，不能应用极限的四则运算法则求之.这是因为极限的四则运算法则仅对有限项成立，即在取极限的过程中，项数要始终保持不变.

以和式中最小(分母最大)的一项的分母取代和式中的各项的分母，得到

$$y_n=\frac{1}{n^2+n+n}+\frac{2}{n^2+n+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}.$$

以和式中最大(分母最小)的一项的分母取代和式中的各项的分母，得到

$$z_n=\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+1}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)},$$

$$y_n \leqslant \frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n} \leqslant z_n.$$

而$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\frac{1}{2}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}$.

例 1.24 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n})$.

解 $\frac{1}{n}(1+1+1+\cdots+1)\leqslant\frac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n})\leqslant\frac{1}{n}(\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n}+\cdots+\sqrt[n]{n})$，

$\frac{n}{n}\leqslant\frac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n})\leqslant\frac{n}{n}\sqrt[n]{n}$，即 $1\leqslant\frac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n})\leqslant\sqrt[n]{n}$.

而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，根据夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n})=1$.

题型 1-10 n 项乘积，当 $n\to\infty$ 时的极限

【解题思路一】 分子分母同时乘以一个因子，使之出现连锁反应.

例 1.25 (1) 当$|x|<1$ 时，求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$.

解 原极限$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x}.$$

(2) 当 $x\neq0$ 时，求$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$.

解 原极限$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\left(2\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\right)}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-2}\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\left(2\sin\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\left(\sin\frac{x}{2^n}\sim\frac{x}{2^n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

【解题思路二】 把通项拆开，使各项相乘过程中中间项相消.

例 1.26 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

解 $1-\frac{1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}$,故

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}.$$

【解题思路三】 夹逼准则.

例 1.27 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$.

解 $0\leqslant\frac{n!}{n^n}=\frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n}<\frac{1}{n}\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1=\frac{1}{n}$.

而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,由夹逼准则有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

例 1.28 利用夹逼准则可以得到$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(a_1)^n+(a_2)^n+\cdots+(a_m)^n}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}a_i\,(a_i>0)$.

利用上面的结论可求数列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}=\max\{1,2,3\}=3$.

3. 函数的极限

目前求极限的方法:

(1) 利用极限的运算法则求极限;

(2) 多项式与分式函数代入法;

(3) 消去零因子法;

(4) “抓大头”方法;

(5) 利用重要极限;

(6) 等价无穷小代换.

题型 1-11 极限的运算性质

【解题思路】 注意极限的运算法则的前提条件是每个函数的极限都存在.

例 1.29 判断题

(1) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在,$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$一定存在. ( ).

(2) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$都不存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$一定不存在. ( ).

解 (1) 错. 假设$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$存在,由于$g(x)=[f(x)+g(x)]-f(x)$,则由极限运算法则知,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$也存在,与条件矛盾. 假设错误.

(2) 错. 如设 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$,$g(x)=-\sin\frac{1}{x}$,$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 及$\lim\limits_{x\to 0}\left(-\sin\frac{1}{x}\right)$不存在,但$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+g(x)]=0$.

题型 1-12 用极限的四则运算法则求极限

【解题思路】 所求极限都是初等函数的极限,并且在所讨论的点处都连续,所以可以直接用代入法计算.

例 1.30 求下列各式极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{x^2+x\ln(\pi+x)}{\sin x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^x$.

解 (1) 原式$=\left[\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2+\dfrac{\pi}{4}\ln\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]\Big/\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}\left(\dfrac{\pi}{4}+\ln\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

(2) 原式$=(1+1)^0=1$.

题型 1-13 消去零公因子方法

【解题思路】 当分子分母都趋于 0 时，对分子分母进行适当的恒等变形约去零公因式.

例 1.31 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$； (2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$.

解 (1) $\dfrac{0}{0}$型不定式，先消去分子分母中的零因子.

$$原式=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)=n.$$

(2) $\dfrac{0}{0}$型不定式，不便化为重要极限公式，应利用三角恒等变形消去零因子后再进行计算.

$$原式=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos x}{1-\cos x+\cos^2 x}=\frac{1+1}{1+1+1}=\frac{2}{3}.$$

题型 1-14 "抓大头"方法

【解题思路】 利用前面"抓大头"的结论，也可以推广到其他函数，只要抓住分子的大头和分母的大头，再求极限即可.

例 1.32 求下列各式极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+2}{7x^3+x^2+3x+1}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+6x^2+5x+1}}{3x-2}$； (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

解 (1) 抓大头分子的大头 $3x^2$，分母的大头 $7x^3$. 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{7x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{7x}=0$.

(2) 抓大头，分子的大头 $2x^3$，分母的大头 $7x^3$. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3}{7x^3}=\dfrac{2}{7}$.

(3) 抓大头，分子的大头 $\sqrt[3]{8x^3}$，分母的大头 $3x$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3+6x^2+5x+1}}{3x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3}}{3x}=\frac{2}{3}.$$

(4) 抓大头 $\sqrt{4x^2+x-1}+x+1$ 的大头为 $\sqrt{4x^2}+x$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+x}{x}=3.$$

注 设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，且 $Q(x_0)\neq 0$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0)$.

当 $Q(x_0)=0$ 时，则商的法则不能应用.

题型 1-15　用重要的极限及等价无穷小代换计算极限

【解题思路】 一般涉及三角函数的 $\frac{0}{0}$ 型极限，要用第一个重要极限 $\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$；$1^\infty$ 型极限要用第二个重要极限 $\lim\limits_{f(x)\to 0}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=\mathrm{e}$.

(1) 注意两个重要极限的变形：

① 只要 $\lim f(x)=0$，$f(x)\neq 0$，也有 $\lim\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$；

② 只要 $\lim f(x)=\infty$，也有 $\lim\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=\mathrm{e}$.

(2) 利用两个重要极限求极限是求极限的重要方法之一，要求熟练掌握.

(3) 对于求 $u(x)^{v(x)}$ 的极限，首先要恒等变形 $u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$.

更进一步 $\boxed{\text{若 } \lim u(x)=1,\ \lim v(x)=\infty,\text{ 则 } \lim u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{\lim v(x)[u(x)-1]}}$.

例 1.33 $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$.

解 $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{-(\pi-x)}=-1$.

例 1.34 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan 2x}{\cot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\right]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\sin 2x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}\right]$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\sin 2x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\frac{-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\right]=-\frac{1}{2}.$$

例 1.35 $\lim\limits_{x\to\mathrm{e}}\frac{\ln x-1}{x-\mathrm{e}}$.

解 解法一　洛必达法则.

解法二　变量代换再利用重要极限. 令 $x-\mathrm{e}=t$，则 $x=t+\mathrm{e}$，于是

$$\lim_{x\to\mathrm{e}}\frac{\ln x-1}{x-\mathrm{e}}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\mathrm{e}+t)-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\mathrm{e}\left(1+\frac{t}{\mathrm{e}}\right)-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{\mathrm{e}}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{\mathrm{e}}}{t}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

例 1.36 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 解法一　$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right\}^{\frac{\cos x-1}{x^2}}\left(1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right\}^{\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

解法二　$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$

例 1.37　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

解　$x\to-\infty$，$2^x\to 0$，$3^x\to 0$ 且 $\ln(1+2^x)\sim 2^x$，$\ln(1+3^x)\sim 3^x$，所以

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{2^x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 3^x(1+3^{-x})}{\ln 2^x(1+2^{-x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln 3+\ln(1+3^{-x})}{x\ln 2+\ln(1+2^x)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 3+\frac{1}{x}\ln(1+3^{-x})}{\ln 2+\frac{1}{x}\ln(1+2^x)}=\frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$ 不存在.

例 1.38　求 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x}$

$$\xlongequal{t=\frac{1}{x}}e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{2}t^2}{t^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

题型 1-16　确定极限中的常数

【解题思路】　对于确定极限中的参数的问题，一般方法是：找出某些待定常数所满足的条件，列出方程，解之即可求出待定求常数，这是求极限中待求常数的总的思路. 常用的具体方法有几种：

求法一　根据下述极限的结果求之

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m}{b_0x^n}=\begin{cases}\infty, & m>n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m<n.\end{cases}$$

例 1.39　已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}-ax+b\right)=0$，求常数 a 和 b.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^2-ax-ax^2+b+bx}{1+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2+(b-a)x+b+1}{1+x}=0$，

则分子的次数小于分母的次数，分子二次项和一次项的系数均为 0，所以 $1-a=0$，$b-a=0$，即 $b=a=1$.

例 1.40　已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{n^\beta-(n-1)^\beta}=\dfrac{1}{2017}$，求 α,β.

解　解法一　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{n^\beta-(n-1)^\beta}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{n^\beta-(n^\beta-C_\beta^1n^{\beta-1}+\cdots+(-1)^\beta)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{\beta n^{\beta-1}-\frac{\beta(\beta-1)}{2}n^{\beta-2}+\cdots+(-1)^{\beta}}\quad(\alpha=\beta-1)$$

$$=\frac{1}{\beta}=\frac{1}{2017},$$

则有 $\beta=2017,\alpha=\beta-1=2016$.

解法二 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{n^{\beta}-(n-1)^{\beta}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{n^{\beta}-n^{\beta}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\beta}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{n^{\beta}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\beta}\right]}\quad\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\beta}-1\sim\beta\left(-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{n^{\beta}\cdot\beta\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{\beta n^{\beta-1}}=\frac{1}{2017},$$

则 $\alpha=\beta-1,\beta=2017$,故 $\alpha=\beta-1=2016$.

求法二 利用下述结果:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A,A\neq0$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

例 1.41 若 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{(x^2-1)}=3$,求 a,b 的值.

解 当 $x\to1$ 时,$x^2-1\to0$,且 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{(x^2-1)}=3$,所以有

$$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0,\quad\text{即}\quad1+a+b=0,b=-(1+a).$$

所以 $\frac{x^2+ax+b}{x^2-1}=\frac{x^2+ax-(a+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{(x-1)(x+a+1)}{(x-1)(x+1)}$,故

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+a+1}{x+1}=\frac{a+2}{2}=3,$$

故得 $a=4,b=-5$.

例 1.42 设 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{ax^2-x-3}{x+1}=b(b\neq0)$,求常数 a 与 b 的值.

解 因为 $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{ax^2-x-3}{x+1}$ 存在,所以必有 $\lim\limits_{x\to-1}(ax^2-x-3)=a+1-3=a-2=0$,解得 $a=2$.而

$$b=\lim_{x\to-1}\frac{2x^2-x-3}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(2x-3)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(2x-3)=-5.$$

故得 $a=2,b=-5$.

例 1.43 已知极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=c$,其中 k,c 为常数,且 $c\neq0$,求 k,c.

解 因为 $x-\arctan x\sim\frac{1}{3}x^3$,由 $c\neq0$,知 $x-\arctan x$ 与 x^k 是同阶无穷小,所以 $k=3$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3}=\frac{1}{3},\quad 故\quad c=\frac{1}{3}.$$

例 1.44 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，求 a,b.

【分析】 本题属于已知极限求参数的反问题.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，且$\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot(\cos x-b)=0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}(e^x-a)=0$，故得 $a=1$. 这时极限化为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}(\cos x-b)=1-b=5$，得 $b=-4$. 因此，$a=1,b=-4$.

例 1.45 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=2$，求 a,b.（2018 年数学三）

解 令 $t=\frac{1}{x}$，则

$$\lim_{x\to+\infty}[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x]=\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{(a+bt)e^t}{t}-\frac{1}{t}\right]=\lim_{t\to 0^+}\frac{(a+bt)e^t-1}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{\ln(a+bt)+t}-1}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(a+bt)+t}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(a+bt)}{t}+1=2,$$

故$\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\ln(a+bt)}{t}=1$.

因为分母趋于零，所以分子也应该趋于零，即$\lim\limits_{t\to 0^+}\ln(a+bt)=\ln a=0$，则 $a=1$，

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(a+bt)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+bt)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{bt}{t}=b=1.$$

综合得 $a=1,b=1$.

题型 1-17 由已知极限求另一个与之相关的极限

【解题思路】 常用的方法：

(1) 利用存在极限的函数与无穷小量的关系：

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+g(x)，其中\lim_{x\to x_0}g(x)=0$$

得到未知函数 $f(x)$的一个表达式，将其代入所求极限中即可求出所求极限.

(2) 找出所求极限与已知极限的关系，为此在已知极限中凑出所求极限.

(3) 利用结论：若$\lim f(x)g(x)=A$(常数)，若 $\lim f(x)=\infty$，则必有 $\lim g(x)=0$.

例 1.46 已知$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$，求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$.

【分析】 求已知极限，在求的过程中配出$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$，然后再比较.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(x+\frac{f(x)}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x^2}\right)}=e^3$，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2$.

例 1.47 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}+\dfrac{\sin 6x-6x}{x^3}$ （在已知极限中凑出所求极限）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}(6x)^3}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}-36=0,$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=36.$

例 1.48 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\ln(1-2x)}{x^2}=4$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-2x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{xf(x)+\ln(1-2x)}{x^2}-\dfrac{2x+\ln(1-2x)}{x^2}\right]$ （用已知极限表示未知极限）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\ln(1-2x)}{x^2}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)-(-2x)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\ln(1-2x)}{x^2}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}(-2x)^2}{x^2}=4-(-2)=6.$

例 1.49 设函数 $f(x)$在 $x=1$ 的某邻域内连续，且有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[f(x+1)+1+3\sin^2 x]}{\sqrt{1-x^2}-1}=-4$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+1)}{x^2}$.

解 因为分母$\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1-x^2}-1)=0$，而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[f(x+1)+1+3\sin^2 x]}{\sqrt{1-x^2}-1}=-4$，所以分子

$\lim\limits_{x\to 0}\ln[f(x+1)+1+3\sin^2 x]=0$， 从而有 $\lim\limits_{x\to 0}(f(x+1)+3\sin^2 x)=0$，

$\lim\limits_{x\to 0}f(x+1)=0$，由已知极限凑出所求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln[f(x+1)+1+3\sin^2 x]}{\sqrt{1-x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)+3\sin^2 x}{-\frac{1}{2}x^2}=-2\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x+1)}{x^2}+3\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)$$

$$=-2\left(\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{x^2}+3\right)=-4,$$

即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+1)}{x^2}+3=2$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+1)}{x^2}=-1.$

4. 无穷小的比较

题型 1-18 无穷小与无穷大的判断

【解题思路】 无穷小极限为零，无穷大极限为无穷大。

例 1.50 判断题

(1) 变量 x_n 按下面数列取值：$1,0,2,0,3,0,\cdots,n,0,\cdots$. 变量 x_n 是无穷大. ( )

(2) 设 $f(x)$是自变量 x 的某个变化过程中的无穷小，$g(x)$为该过程中的无穷大，则在该过程中 $f(x)g(x)$以 1 为极限. ( )

解 (1) 错. 因为不论 n 取得有多大, x_n 后总有为 0 的项, 对任何正数 M, $0>M$ 不能成立, 但变量 x_n 是无界的. 这表明无界的数列不一定是无穷大.

(2) 错. 如当 $n\to\infty$ 时, $\frac{1}{n}$ 是无穷小, n^2 是无穷大, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot n^2=\infty$, 即它们的积是无穷大.

例 1.51 证明: 当 $x\to\infty$ 时, $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ 是无穷小.

证明
$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$$
所以 $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ 是无穷小.

题型 1-19 无穷小的比较

【解题思路】

(1) 利用无穷小的比较的定义, 求极限.

(2) $x\to 0$ 时, $x^n+x^m\sim x^{\min(m,n)}$, $x^nx^m\sim x^{m+n}$, $xo(x^n)=o(x^{n+1})$.

(3) 当 $\varphi(x)\to 0$ 时, $\varphi(x)+o(\varphi(x))\sim\varphi(x)$.

(4) 利用: 若 $x\to 0$ 时, $f(x)\sim ax^m$, $g(x)\sim bx^n$ $\quad m>0, n>0$.

若 $m<n$, 则 ax^m 是 bx^n 的低阶无穷小, 从而 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷小;

若 $m=n$, 则 bx^n 是 ax^m 的同阶无穷小, 从而 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的同阶无穷小;

若 $m>n$, 则 ax^m 是 bx^n 的高阶无穷小, 从而 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小.

(5) $\alpha\sim\beta$, 则 $\alpha=\beta+o(\beta)$.

例 1.52 当 $x\to 0$ 时, 用 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小, 则下列式子中错误的是(　　).

A. $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$ 　　B. $o(x)o(x^2)=o(x^3)$

C. $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$ 　　D. $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

解 由高阶无穷小的定义可知 A, B, C 都是正确的, 对于 D 可找出反例, 例如当 $x\to 0$ 时, $f(x)=x^2+x^3=o(x)$, $g(x)=x^3=o(x^2)$, 但 $f(x)+g(x)=o(x)$ 而不是 $o(x^2)$, 故应该选 D.

例 1.53 选择题

(1) 当 $x\to -1$ 时, x^2+2x+1 与 x^2-1 比较是(　　).

A. 等价无穷小　　B. 同阶无穷小　　C. 低阶无穷小　　D. 高阶无穷小

(2) 当 $x\to 0$ 时, 与 $x\sin 5x$ 是同阶的无穷小是(　　).

A. x　　B. $3x^2$　　C. x^3　　D. x^4

解 (1) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{x-1}=0$, 故选 D.

(2) $x\sin 5x\sim 5x^2$, 故选 B.

例 1.54 证明: 当 $x\to\infty$ 时, $(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$ 与 $\frac{1}{x}$ 是等价无穷小.

证明 因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=1,$$

所以$(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$与$\frac{1}{x}$是等价无穷小.

例 1.55 当 $x\to 0$ 时,判断下列各无穷小对无穷小 x 的阶:

(1) $\sqrt{x}+\sin x$;　　(2) $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}$;　　(3) $\sqrt[3]{x}-3x^3+x^5$.

解 (1) 因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}+\sin x}{\sqrt{x}}=1$,所以 $x\to 0$ 时$\sqrt{x}+\sin x$ 是 x 的$\frac{1}{2}$阶无穷小.

或 $x\to 0$　$\sin x\sim x=o(\sqrt{x})$,所以$\sqrt{x}+\sin x\sim\sqrt{x}$,即 $x\to 0$ 时$\sqrt{x}+\sin x$,是 x 的$\frac{1}{2}$阶无穷小,是 x 的低阶无穷小.

(2) 因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0}(x^{\frac{1}{6}}-1)=-1$,所以 $x\to 0$ 时 $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}$是 x 的$\frac{1}{2}$阶无穷小.

(3) 因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-3x^3+x^5}{\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-3x^{\frac{8}{3}}+x^{\frac{14}{3}})=1$,所以 $x\to 0$ 时$\sqrt[3]{x}-3x^3+x^5$ 是 x 的$\frac{1}{3}$阶无穷小.

或 $x\to 0$ 时,$-3x^3+5x^5=o(\sqrt[3]{x})$,所以$\sqrt[3]{x}-3x^3+5x^5\sim\sqrt[3]{x}$,即 $x\to 0$ 时$\sqrt[3]{x}-3x^3+x^5$ 是 x 的$\frac{1}{3}$阶无穷小.

例 1.56 已知函数 $f(x)=\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}$,记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若当 $x\to 0$ 时,$f(x)-a$ 是 x^k 的同阶无穷小,求 k.(2012 年数学二)

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}+\frac{x}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$,即 $a=1$.

(2) 当 $x\to 0$ 时,由 $f(x)-a=f(x)-1=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}$.

又因为,当 $x\to 0$ 时,$x-\sin x$ 与$\frac{1}{6}x^3$ 等价,故 $f(x)-a\sim\frac{1}{6}x$,即 $k=1$.

例 1.57 当 $x\to 0^+$ 时,与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是(　　).

A. $1-e^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　D. $1-\cos\sqrt{x}$

解 $1-e^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x}$;

$\ln(1+x)\sim x,\ln(1-\sqrt{x})\sim-\sqrt{x}$,故 $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}=\ln(1+x)-\ln(1-\sqrt{x})\sim x+\sqrt{x}\sim\sqrt{x}$;

$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x}$;　　$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}x$.

故选 B.

题型 1-20 利用等价无穷小代替求极限

【解题思路一】 当一个无穷小在算式中处于因子地位(与其他部分是相乘关系)时,才能够用它的某个等价无穷小来代替;若是两个无穷小做和或差,则要谨慎代换,是有条件的;而且这种代替只能是用简单的代替复杂的,不能用复杂的代替简单的,否则就失去了等价无穷小替代的意义了.

例 1.58 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{2x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^n}{\sin^m x}$($m,n$ 为正整数);

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^n}{\sin^m x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{x^m}=\begin{cases}1, & n=m,\\ 0, & n>m,\\ \infty, & n<m.\end{cases}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x})(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}{x^2(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1-\cos x}{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}}{x^2\cos x}=\dfrac{1}{2}$.

或 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^3}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

例 1.59 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin^2 x+\cos x-1)\tan 3x}{(e^{x^2}-1)\sin x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin^2 x+\cos x-1)\tan 3x}{(e^{x^2}-1)\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2-\dfrac{1}{2}x^2\right)\cdot 3x}{x^2\cdot x}=\dfrac{3}{2}$.

例 1.60 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$.

【分析】 本题属于 1^∞ 型未定式,对于这类题

若 $\lim u(x)=1,\lim v(x)=\infty$,则 $\lim u(x)^{v(x)}=e^{\lim v(x)[u(x)-1]}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e}{x}\left[\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}-1\right]}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e}{x}\frac{(e^x-1)+(e^{2x}-1)+\cdots+(e^{nx}-1)}{n}}\quad\text{(等价无穷小代换)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e}{x}\frac{x+2x+\cdots+nx}{n}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e}{x}\frac{\frac{n(n+1)}{2}x}{n}}=e^{\frac{(n+1)e}{2}}.$$

例 1.61 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{\sqrt[3]{1+\arctan x\cdot\tan x^2\cdot(3+\arcsin x)}-1}$.

解 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{\sqrt[3]{1+\arctan x\cdot\tan x^2\cdot(3+\arcsin x)}-1}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln x}-e^{x\ln\sin x}}{\frac{1}{3}\cdot\arctan x\cdot\tan x^2\cdot(3+\arcsin x)}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln\sin x}\cdot(e^{x\ln x-x\ln\sin x}-1)}{\frac{1}{3}\cdot x\cdot x^2\cdot 3}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln\sin x}\cdot(x\ln x-x\ln\sin x)}{x^3}\qquad(\lim_{x\to0^+}x\ln\sin x=0)$$

$$=e^0\lim_{x\to0^+}\frac{x\ln\frac{x}{\sin x}}{x^3}\qquad\left(\ln\frac{x}{\sin x}=\ln\left(1+\frac{x}{\sin x}-1\right)\sim\frac{x}{\sin x}-1\right)$$

$$=e^0\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x}{\sin x}-1}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

5. 函数的连续与间断

题型 1-21 讨论函数的连续性

【解题思路】 当所给函数是抽象的记号而不是具体函数时，往往用 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$ 是否成立来讨论函数的连续性；当所给函数有具体函数关系时，往往用 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 是否成立来讨论函数的连续性.

讨论分段函数的连续性时，要分两种情况来讨论：

一是在某段上，按该段上初等函数式来讨论；

二是在相邻两段的分段点处，则要用极限存在的充要条件来讨论，看左右极限是否存在，是否相等来确定连续还是间断.

例 1.62 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 连续的(　　).

A. 必要条件　　B. 充分条件　　C. 充要条件　　D. 无关条件

解 选 A.

例 1.63 讨论下列函数的连续性：

(1) 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln(1-x)$，要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$f(0)$ 为多少？

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\arctan\dfrac{1}{x}+\dfrac{a+be^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ a,b 为何值时 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\sin x}}{\arctan\dfrac{x}{2}}, & x>0,\\ ae^{2x}-1, & x\leqslant0\end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，求 a.

(4) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}, & x\neq 1,\\ 4, & x=1\end{cases}$ 在定义域内连续,求 a,b 的值.

解 (1) $f(x)$在 $x=0$ 处没有定义,$x=0$ 是函数的间断点.

因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1-x)=-1$,所以补充 $f(0)=-1$ 能使 $f(x)$在 $x=0$ 连续.

(2) 遇到 $x\to 0$,$e^{\frac{1}{x}}$的极限,要讨论左、右极限 $x\to 0^-$,$e^{\frac{1}{x}}\to 0$;$x\to 0^+$,$e^{\frac{1}{x}}\to +\infty$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{\pi}\arctan\dfrac{1}{x}+\dfrac{a+be^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+a=-\dfrac{1}{2}+a$,

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{x}+\frac{a+be^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}+b=\frac{1}{2}+b,$$

而 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续,且 $f(0)=1$,则要求 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$,即

$$-\frac{1}{2}+a=\frac{1}{2}+b=1,\text{解得 } a=\frac{3}{2},b=\frac{1}{2}.$$

所以,当 $a=\dfrac{3}{2}$,$b=\dfrac{1}{2}$时,能使函数在 $x=0$ 连续.

(3) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ae^{2x}-1)=a-1$,

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{\sin x}}{\arctan\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{\frac{x}{2}}=-2,$$

而 $f(x)$在 $x=0$ 处连续,且 $f(0)=a-1$,故

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0),\text{即有 } a-1=-2,\text{则 } a=-1.$$

(4) $f(x)$在定义域内连续,所以它在 $x=1$ 处连续. 所以

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{ax+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}=\lim_{x\to 1}\frac{(ax+b)(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})}{3x+1-x-3}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{ax+b}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}}{2}=2\lim_{x\to 1}\frac{ax+b}{x-1}=4,$$

所以$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax+b}{x-1}=2$,故 $a=2$,$b=-2$.

例 1.64 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\cos\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$,当 α,β 满足什么条件时,$f'(x)$在 $x=0$ 处连续.

解 当 $x<0$ 时,$f'(x)=0$,$f'_-(0)=0$;

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\alpha}\cos\frac{1}{x^{\beta}}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^{\beta}},$$

当 $x>0$ 时,$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x^{\beta}}+(-1)x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}}(-\beta)\dfrac{1}{x^{\beta+1}}$

$$=\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^{\beta}}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^{\beta}}.$$

若 $f'(x)$在 $x=0$ 处连续，则 $f'_-(0)=f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x^\beta}=0$，从而得 $\alpha-1>0$.

由 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\alpha x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\dfrac{1}{x^\beta}\right)=0$，得 $\alpha-\beta-1>0$.

题型 1-22　间断点及其类型的判断

【解题思路】 不连续就是间断，找函数的间断点主要是找无定义的点(例如使分式的分母为 0 的点)．无定义的点一定是间断点，分段函数的分段点可能是间断点．判断间断点的类型主要根据定义，左、右极限都存在的点为第一类间断点，左、右极限相等时为可去间断点；不相等时为跳跃间断点．除了第一类就是第二类间断点．

例 1.65　判断题

(1) 分段函数必有间断点．　　(　　)

(2) 若 $f(x)$与 $g(x)$都在 x_0 点间断，则 $f(x)+g(x)$也在 x_0 点间断．　　(　　)

解　(1) 错．例如分段函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0,\\ 1+x, & x\geqslant0,\end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$上连续．

(2) 错．例如 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 与 $g(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ -1, & x=0\end{cases}$ 都在 $x=0$ 处不连续，但 $f(x)+g(x)$在 $x=0$ 处连续．

例 1.66　选择题

(1) $x=0$ 是 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$的(　　)．

A. 跳跃间断点　　B. 无穷间断点　　C. 可去间断点　　D. 振荡间断点

(2) 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq0,\\ f(0), & x=0,\end{cases}$其中 $f(x)$在 $x=0$ 处可导，$f'(0)\neq0$，$f(0)=0$，则 $x=0$ 是 $F(x)$的(　　)．

A. 连续点　　B. 第一类间断点

C. 第二类间断点　　D. 连续点或间断点不能由此确定

(1990 年数学二)

解　(1) 因为 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$在 $x=0$ 处没有定义，所以 $x=0$ 为 $f(x)$的间断点．又因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，若补充 $f(0)=0$，那么 $f(x)$在 $x=0$ 处就连续了，因此 $x=0$ 为 $f(x)$的可去间断点，为第一类间断点．选 C.

(2) 因为$\lim\limits_{x\to0}F(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)\neq0=f(0)=F(0)$，即$\lim\limits_{x\to0}F(x)\neq F(0)$，$x=0$ 为 $F(x)$的可去间断点，为第一类间断点．故选 B.

例 1.67　设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，

$$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则(　　).

A. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点　　B. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

C. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点　　D. $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

【分析】 考查极限 $\lim\limits_{x\to0}g(x)$ 是否存在,如存在,是否等于 $g(0)$ 即可,通过换元 $u=\dfrac{1}{x}$,可将极限 $\lim\limits_{x\to0}g(x)$ 转化为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=a\left(令\ u=\dfrac{1}{x}\right)$. 又 $g(0)=0$,所以,当 $a=0$ 时,$\lim\limits_{x\to0}g(x)=g(0)$,即 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处连续,当 $a\neq0$ 时,$\lim\limits_{x\to0}g(x)\neq g(0)$,即 $x=0$ 是 $g(x)$ 的第一类间断点,因此,$g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关,故选 D.

例 1.68 求函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的间断点并判断其类型.

解 函数在 $x=-1,x=0,x=1$ 处没有定义,因此间断点为 $x=-1,x=0,x=1$.

当 $x\ln|x|\to0$ 时,$|x|^x-1=e^{x\ln|x|}-1\sim x\ln|x|$,$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln|x|}{x\ln|x|}=1$,所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点.

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln|x|}{2x\ln|x|}=\dfrac{1}{2}$,所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点.

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x\ln|x|}{-(x+1)\ln|x|}=\infty$,所以 $x=-1$ 是函数 $f(x)$ 的无穷间断点.

例 1.69 函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to0}\left(1+\dfrac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内(　　).

A. 连续　　B. 有可去间断点　　C. 有跳跃间断点　　D. 有无穷间断点

解 $f(x)=\lim\limits_{t\to0}\left(1+\dfrac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{x}\frac{x^2}{t}}=e^x$,$x\neq0$,故 $f(x)$ 有可去间断点 $x=0$,故选 B.

例 1.70 求函数 $f(x)=\dfrac{4}{1-\dfrac{2}{x}}$ 的间断点,并判断其类型.

解 函数 $f(x)=\dfrac{4}{1-\dfrac{2}{x}}$ 在 $x=0,x=2$ 处没有定义,因此 $x=0,x=2$ 都是函数的间断点.

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4}{1-\dfrac{2}{x}}=0$,$x=0$ 为函数 $f(x)=\dfrac{4}{1-\dfrac{2}{x}}$ 的可去间断点,为第一类间断点.

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4}{1-\dfrac{2}{x}}=\infty$,$x=2$ 为函数 $f(x)=\dfrac{4}{1-\dfrac{2}{x}}$ 的无穷间断点,为第二类间断点.

例 1.71 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$,求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型.

解 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}=e^{\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}-1\right)\frac{x}{\sin t-\sin x}}=e^{\frac{x}{\sin x}}$，因此 $x=0,x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 都是 $f(x)$ 的间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}}=e$，$x=0$ 为函数的可去间断点，为第一类间断点.

$\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)=e^{\lim\limits_{x\to k\pi}\frac{x}{\sin x}}=\infty$，因此 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为函数的无穷间断点，为第二类间断点.

例 1.72 求函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 的间断点，并判断类型.

解 函数没有定义的点为 $x=0,x=1,x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，故函数的间断点为 $x=0,x=1,x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$.

在 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)}{(e^{\frac{1}{x}}-e)}\cdot\dfrac{\tan x}{x}=1\qquad\left(\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty\right)$，

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)}{(e^{\frac{1}{x}}-e)}\cdot\frac{\tan x}{x}=-1\qquad\left(\lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0\right),$$

所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点，属于第一类间断点.

在 $x=1$ 处，$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)}{(e^{\frac{1}{x}}-e)}\cdot\dfrac{\tan x}{x}=\infty$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点，属于第二类间断点.

在 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 处，$\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)}{(e^{\frac{1}{x}}-e)}\cdot\dfrac{\tan x}{x}=\infty$，故 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点，属于第二类间断点.

例 1.73 求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的间断点，并判断类型.

解 $x=0,x=1,x=-1$ 为间断点.

当 $x=0$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x+1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}=1$，而 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{x+1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}=-1$，所以 $x=0$ 是跳跃间断点，属于第一类间断点.

当 $x=1$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{x+1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $x=1$ 是可去间断点，属于第一类间断点.

当 $x=-1$ 时，因 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\infty$，所以 $x=-1$ 是无穷间断点，属于第二类间断点.

例 1.74 函数 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$，其中 $x=0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点，$x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，求 a,b.

解 因为 $x=0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点，所以 $\lim\limits_{x\to0}(x-a)(x-1)=0$，即 $(-a)(-1)=0$，

得 $a=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}e^x-b\neq 0$，即 $b\neq 1$.

又 $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，则 $\lim\limits_{x\to 1}e^x-b=0$，得 $b=e$.

例 1.75 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$，判断 $x=1$ 为 $f(x)$ 的什么类型间断点.

解 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 1^-}2^{\frac{1}{x-1}}=0$，故 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=1$，

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 1^+}2^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，故 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=0$.

$x=1$ 处左右极限存在但不相等，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点，属于第一类间断点.

题型 1-23 利用闭区间上连续函数的性质证明命题

例 1.76 判断题

(1) 在 $[a,b]$ 上不连续的函数一定没有最大值. (　　)

(2) 在 $[a,b]$ 上不连续的函数一定无界. (　　)

解 (1) 错.(2) 错. 例如：$y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $[-1,1]$ 上不连续，但它有最大值，也有界.

例 1.77 证明下列各题：

(1) 证明 $x=e^{x-3}+1$ 至少有一个不超过 4 的正根.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且无零点，证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒正或恒负.

证明 (1) 令 $f(x)=x-e^{x-3}-1$，显然 $f(x)$ 在闭区间 $[0,4]$ 上连续且

$$f(0)=-e^{-3}-1<0,\qquad f(4)=4-e^{4-3}-1=3-e>0.$$

根据零点定理，在开区间 $(0,4)$ 内至少存在一点 $\xi\in(0,4)$，使 $f(\xi)=0$，原命题得证.

(2) 用反证法. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不是恒正或恒负，则在 $[a,b]$ 必有 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，使得 $f(x_1)f(x_2)<0$. 又 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]\subset[a,b]$ 上连续，所以根据零点定理至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)\subset[a,b]$，使得 $f(\xi)=0$. 这与已知矛盾. 故得证.

题型 1-24 证明存在实根. 一般利用零点存在定理证明方程根的存在性

【解题思路】 (1) 零点存在定理由 3 部分组成：①闭区间 $[a,b]$；②函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；③$f(a)$ 与 $f(b)$ 异号. 证明根的存在性命题常常只给出上述 3 个条件中的部分条件，另一些条件需要证明. 根据所给条件的不同，利用零点定理证明根的存在性有下述三类命题：

① 需找出函数值异号的两点，即找 $x_1,x_2\in[a,b]$，使 $f(x_1)f(x_2)<0$. 常用下述各法找出这样的两点.

用观察法，找两个特殊的点，使函数值在这两点上异号；根据函数极限为正无穷、负无穷分别求出函数值大于 0、小于 0 的两点；由函数值的大小关系找出 $x_1,x_2\in[a,b]$，使 $f(x_1)f(x_2)<0$.

② 需找出根存在的区间.

③ 需构造函数.

(2) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在 $[a,b]$ 上取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

例 1.78 证明方程 $x^3+3x=9$ 至少有一个根介于 1 和 3 之间.

证明 所考虑区间应该是$[1,3]$. 设 $f(x)=x^3+3x-9$,则 $f(x)$在$[1,3]$上连续,且 $f(1)=-5<0$,$f(3)=27>0$,由零点定理,在$(1,3)$内至少有一点 ξ,使 $f(\xi)=0$,即方程 $x^3+3x=9$ 在$(1,3)$内至少有一根.

例 1.79 证明方程 $x+p+q\cos x=0$ 至少有一个根,其中 p,q 为常数.

证明 设 $f(x)=x+p+q\cos x$,则

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+p+q\cos x)=-\infty$,故存在 x_1,$f(x_1)<0$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+p+q\cos x)=+\infty$,故存在 $x_2>x_1$,$f(x_2)>0$.

$f(x)$在$[x_1,x_2]$上连续,且 $f(x_1)<0$,$f(x_2)>0$,则 $f(x)=0$ 在$(x_1,x_2)\subset(-\infty,+\infty)$内至少有一根.

6. 介值定理的应用:若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则它在$[a,b]$上取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

题型 1-25 证明存在 $\xi\in[a,b]$,使含 ξ 的等式成立

【解题思路】 利用介值定理证明:先将含有 ξ 的待证等式分离成两部分使含 ξ 的函数和常数项分居在等式的两端,为方便,令其分别等于 $f(\xi)$和 k. 设法证明常数 k 在 $f(x)$的相关区间上的最大值与最小值之间,再利用介值定理即得存在 ξ 使得 $f(\xi)=k$.

例 1.80 若 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $a<c<d<b$,证明在(a,b)内至少存在一点 ξ,使

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi),$$

其中 p,q 为任意正常数.

证明 先将预证结论改写成 $f(\xi)=\dfrac{pf(c)+qf(d)}{p+q}$,其右端为一常数. 令此常数 $k=\dfrac{pf(c)+qf(d)}{p+q}$,可归结为证明存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=k$,于是利用介值定理证明之. 为此只需证明 k 介于 $f(x)$的最大值与最小值之间.

因 $f(x)$在$[a,b]$上连续,设 M,m 分别为 $f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值,于是

$$m\leqslant f(c)\leqslant M,\quad m\leqslant f(d)\leqslant M,\text{故 } pm\leqslant pf(c)\leqslant pM,\quad qm\leqslant qf(d)\leqslant qM,$$

则

$$pm+qm\leqslant pf(c)+qf(d)\leqslant pM+qM,$$

$$m\leqslant k=\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}\leqslant M.$$

由介值定理知,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=k$,即 $pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$.

1.4 课后习题解答

习题 1.1

1. 用区间表示下列不等式的解:

(1) $x^2\leqslant9$; (2) $|x-1|>1$; (3) $(x-1)(x+2)<0$.

解 (1) $\{x|-3\leqslant x\leqslant3\}$; $[-3,3]$.

(2) $\{x|x>2$ 或 $x<0\}$; $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

(3) $\{x|-2<x<1\}$; $(-2,1)$.

2. 判断下面函数是否相同,并说明理由.

(1) $y=1$ 与 $y=\sin^2x+\cos^2x$; (2) $y=2x+1$ 与 $x=2y+1$.

解 (1) 虽然这两个函数的表现形式不同,但它们的定义域$(-\infty,+\infty)$与对应法则均相同,所以这两个函数相同.

(2) 虽然它们的自变量与因变量所用的字母不同,但其定义域$(-\infty,+\infty)$和对应法则均相同,所以这两个函数相同.

3. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sin\sqrt{4-x^2}$; (2) $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}+\sqrt{x+2}$;

(3) $y=\arccos\ln\dfrac{x}{10}$; (4) $y=\tan(x+1)$.

解 (1) 要使 $\sin\sqrt{4-x^2}$有意义,必须 $4-x^2\geqslant 0$,即$|x|\leqslant 2$.所以定义域为$[-2,2]$.

(2) 当 $x\neq 3$ 且 $x\neq 1$ 时,$\dfrac{1}{x^2-4x+3}$有意义,而要使 $\sqrt{x+2}$有意义,必须 $x\geqslant -2$,故函数的定义域为:$[-2,1)\cup(1,3)\cup(3,+\infty)$.

(3) 要使 $\arccos\ln\dfrac{x}{10}$有意义,则使$-1\leqslant\ln\dfrac{x}{10}\leqslant 1$,即$\dfrac{1}{e}\leqslant\dfrac{x}{10}\leqslant e$,$\dfrac{10}{e}\leqslant x\leqslant 10e$,即定义域为$\left[\dfrac{10}{e},10e\right]$.

(4) 要使 $\tan(x+1)$有意义,则必有 $x+1\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$,$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$,即函数定义域为$\left\{x\,|\,x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1,k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\right\}$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0,\\ 2, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$ 求 $f(3),f(2),f(0),f\left(\dfrac{1}{2}\right),f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

解 $f(3)=2$, $f(2)=1$, $f(0)=2$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2^{-\frac{1}{2}}$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 0,\\ x^2+4, & x<0,\end{cases}$ 求 $f(x-1)+f(x+1)$.

解 $f(x-1)=\begin{cases}2x-1, & x\geqslant 1,\\ x^2-2x+5, & x<1,\end{cases}$ $f(x+1)=\begin{cases}2x+3, & x\geqslant -1,\\ x^2+2x+5, & x<-1,\end{cases}$

故

$$f(x-1)+f(x+1)=\begin{cases}2x^2+10, & x<-1,\\ x^2+8, & -1\leqslant x<1,\\ 4x+2, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

6. 1998 年在上海乘大众出租车的第一个 5km(包括以内)路程要付费 14.40 元,续后的每 1km(包括 1km 以内)需要付费 1.40 元,试把付费金额 C 元表达成距离 $x$km 的函数,其中 $0<x<10$.

解 $C=\begin{cases}14.4, & 0<x\leqslant 5,\\ 14.4+1.4([x-5]+1), & 5<x\leqslant 10,\end{cases}$ 其中$[x-5]$表示 $x-5$ 取整.

7. 写出图 1-2(a)和图 1-2(b)所示函数的解析表达式

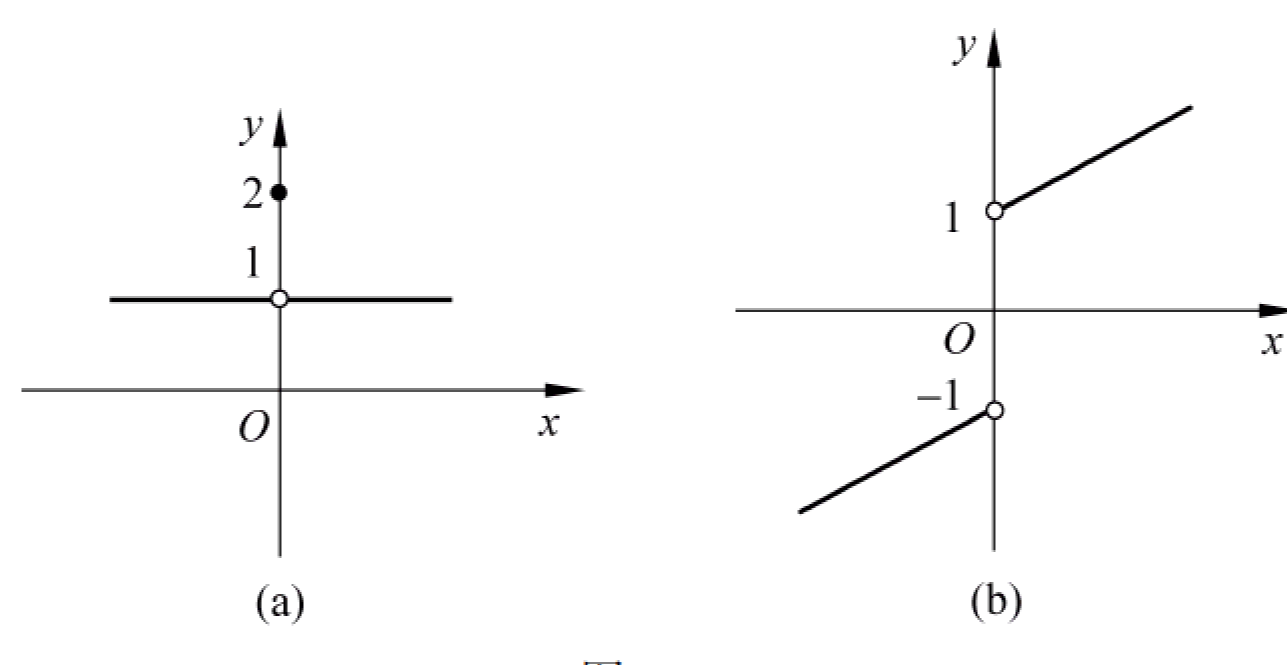


图 1-2

解 (a) $y=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 2, & x=0;\end{cases}$ (b) $y=\begin{cases}ax+1, & x>0,\\ bx-1, & x<0,\end{cases}$其中 $a>0,b>0$.

8. 已知 $f(x)$是二次多项式,且 $f(x+1)-f(x)=8x+3$,求 $f(x)$.

解 设 $f(x)=ax^2+bx+c$,由 $f(x+1)-f(x)=8x+3=a(x+1)^2+b(x+1)+c-(ax^2+bx+c)=2ax+a+b$,得 $2a=8,a+b=3$,解得 $a=4,b=-1$, 所以 $f(x)=4x^2-x+c$.

9. 判定下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{\cos x}$; (2) $f(x)=(x^2+x)\sin x$;

(3) $f(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\leqslant 0,\\ e^x-1, & x>0;\end{cases}$ (4) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

分析:先看定义域是否关于原点对称,若对称再看 $f(-x)$等于什么. 若定义域关于原点不对称,则是非奇非偶函数.

解 本题的四个小题中函数的定义域都关于原点对称.

(1) $f(-x)=f(x)$,偶函数. (2) 非奇非偶函数. (3) 奇函数.

(4) $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\dfrac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x).$$

由定义知 $f(x)$为奇函数.

10. 证明下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y=x^2$ $(-1,0)$; (2) $y=\sin x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$; (3) $y=\dfrac{x}{1+x}$ $(-1,+\infty)$.

证明 (1) 任取 $x_1,x_2\in(-1,0)$,且设 $x_1<x_2$,由于 $x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)>0$,所以 $y=x^2$ 在$(-1,0)$内单调减少.

(2) 任取 $x_1,x_2\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$,设 $x_1<x_2$,由于 $\sin x_1-\sin x_2=2\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}<0$,所以 $y=\sin x$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内单调增加.

(3) 在$(-1,\infty)$内任取两点 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{x_1}{1+x_1}-\dfrac{x_2}{1+x_2}=\dfrac{x_1-x_2}{(1+x_1)(1+x_2)}$.

因为 x_1,x_2 是$(-1,\infty)$内任意两点,所以 $1+x_1>0,1+x_2>0$. 又因为 $x_1-x_2<0$,故 $f(x_1)-f(x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$,所以 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$在$(-1,+\infty)$内是单调增加的.

提高题

1. 设 $f(x)$是周期为 4 的奇函数,且 $f(x)=x^2-2x,x\in[0,2]$,求 $f(7)$.

解 $f(7)=f(3)=f(-1)=-f(1)=-(1^2-2\times1)=1$.

2. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-L,L)$内的,证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数.

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证明 (1) 设 $f(x),g(x)$都是$(-L,L)$内的偶函数,则 $f(-x)=f(x),g(-x)=g(x),f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)$,所以 $f(x)+g(x)$为偶函数. 同理可证奇函数情形.

(2) 设 $f(x)$是$(-L,L)$内的偶函数,$g(x)$是$(-L,L)$内的奇函数,则

$$f(-x)=f(x),\quad g(-x)=-g(x).$$

令 $h(x)=f(x)g(x)$,则 $h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$, 所以 $h(x)$是奇函数. 其余

两个类似证明.

3. 证明函数 $y=\frac{x}{x^2+1}$在$(-\infty,+\infty)$上是有界的.

证明 因为$(1-|x|)^2\geqslant 0$,所以$|1+x^2|\geqslant 2|x|$,故$|f(x)|=\left|\frac{x}{x^2+1}\right|=\frac{2|x|}{2|1+x^2|}\leqslant\frac{1}{2}$,对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$都成立.所以函数在$(-\infty,+\infty)$上是有界函数.

4. 证明函数 $y=\frac{1}{x^2}$在$(0,1)$上是无界的.

证明 对于无论怎样大的 $M>0$,总可在$(0,1)$内找到相应的 x. 例如取 $x_0=\frac{1}{\sqrt{M+1}}\in(0,1)$使得 $|f(x_0)|=\frac{1}{x_0^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{M+1}}\right)^2}=M+1>M$,所以 $f(x)=\frac{1}{x^2}$在$(0,1)$上是无界函数.

5. 判断函数 $f(x)=x\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是否有界?说明理由.

解 无界. 如$\left\{x\,|\,x=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$, $f(x)=2k\pi+\frac{\pi}{2}$. 当 x 无限增大时,$f(x)$ 无限增大,此时 $f(x)$ 无界.

6. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$满足 $f(0)\neq 0$,当 $x>0$ 时,$f(x)>1$,且对任意 $a,b\in\mathbf{R}$,$f(a+b)=f(a)f(b)$. (1) 求 $f(0)$;(2) 求证:对任意 $x\in\mathbf{R}$,有 $f(x)>0$;(3)求证:$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

解 (1) $f(x)=1$.

(2) 当 $x>0$ 时,$1=f(0)=f(x)f(-x)>0$. 又由于 $x>0$ 时,$f(x)>1$ 得知当 $x<0$ 时,$0<f(x)<1$. 综上,对任意 $x\in\mathbf{R}$,有 $f(x)>0$.

(3) 对任意的 $x_1<x_2$ 有,$x_1-x_2<0$,$\frac{f(x_1)}{f(x_2)}=\frac{f(x_1-x_2+x_2)}{f(x_2)}=f(x_1-x_2)<1$,故单调增函数.

习题 1.2

1. 下列初等函数是由哪些基本初等函数复合而成的?

(1) $y=\sqrt[3]{\arcsin a^x}$; (2) $y=\sin^3\ln x$; (3) $y=a^{\tan x^2}$; (4) $y=\ln[\ln^2(\ln^3 x)]$.

解 (1) 令 $u=\arcsin a^x$,则 $y=\sqrt[3]{u}$,再令 $v=a^x$,则 $u=\arcsin v$,因此 $y=\sqrt[3]{\arcsin a^x}$是由基本初等函数 $y=\sqrt[3]{u}$,$u=\arcsin v$,$v=a^x$ 复合而成的.

(2) 令 $u=\sin\ln x$,则 $y=u^3$,再令 $v=\ln x$,则 $u=\sin v$. 因此 $y=\sin^3\ln x$ 是由基本初等函数 $y=u^3$,$u=\sin v$,$v=\ln x$ 复合而成.

(3) 令 $u=\tan x^2$,则 $y=a^u$,再令 $v=x^2$,则 $u=\tan v$,因此 $y=a^{\tan x^2}$是由基本初等函数 $y=a^u$,$u=\tan v$,$v=x^2$ 复合而成.

(4) 令 $u=\ln^2(\ln^3 x)$,则 $y=\ln u$,再令 $v=\ln(\ln^3 x)$,则 $u=v^2$,再令 $w=\ln^3 x$,则 $v=\ln w$,再令 $t=\ln x$,则 $w=t^3$,因此 $y=\ln[\ln^2(\ln^3 x)]$是由基本初等函数 $y=\ln u$,$u=v^2$,$v=\ln w$,$w=t^3$,$t=\ln x$ 复合而成.

2. 指出下列函数是怎样复合而成的:

(1) $y=(1+x)^{20}$; (2) $y=2^{\sin^2 x}$.

解 (1) $y=u^{20}$,$u=1+x$; (2) $y=2^u$,$u=v^2$,$v=\sin x$.

3. 设 $f(x+1)=\frac{x+1}{x+5}$,求 $f(x)$,$f(x-1)$.

解 设 $x+1=t$,则 $f(t)=\frac{t}{t+4}$,故 $f(x)=\frac{x}{x+4}$,$f(x-1)=\frac{x-1}{x+3}$.

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$________.

解 $f[f(x)]=1$.

5. 设 $f(x)=\arcsin x$,求 $f(0),f(-1),f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

解 $f(0)=0$, $f(-1)=-\frac{\pi}{2}$, $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$.

6. 设 $g(x)=\arctan x$,求 $g(0),g(1),g(\sqrt{3}),g(-1)$.

解 $\arctan 0=0$, $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$, $\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, $\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$.

提高题

1. 设 $f(x)$为奇函数,$g(x)$为偶函数,试证:$f[f(x)]$为奇函数,$g[f(x)]$为偶函数.

证明 因为 $f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)]$,所以 $f[f(x)]$为奇函数;

因为 $g[f(-x)]=g[-f(x)]=g[f(x)]$,所以 $g[f(x)]$为偶函数.

2. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\frac{1-x}{1+x}$; (2) $y=2\sin 3x$; (3) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$.

解 (1) 由 $y=\frac{1-x}{1+x}$,解得 $x=\frac{1-y}{1+y}$,故反函数为 $y=\frac{1-x}{1+x}$.

(2) 由 $y=2\sin 3x$,解得 $x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}$,故反函数为 $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$.

(3) 由 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$,解得 $x=\log_2\frac{y}{1-y}$,故反函数为 $y=\log_2\frac{x}{1-x}$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$,,求 $f[g(x)]$.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & e^x<1\\ 0, & e^x=1\\ -1, & e^x>1\end{cases}=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}$

习题 1.3

1. 设销售商品的总收入是销售量 x 的二次函数,已知 $x=0,2,4$ 时,总收入分别是 0,6,8,试确定总收入函数 $R(x)$.

解 设 $R(x)=ax^2+bx+c$,由 $\begin{cases}0=a\cdot 0+b\cdot 0+c,\\ 6=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c,\\ 8=a\cdot 4^2+b\cdot 4+c,\end{cases}$ 得 $a=-\frac{1}{2},b=4,c=0$. 故 $R(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x$.

2. 设某厂生产某种产品 1000t,定价为 130 元/t,当一次售出 700t 以内时,按原价出售;若一次成交超过 700t 时,超过 700t 的部分按原价的 9 折出售,试将总收入表示成销售量的函数.

解 $R(x)=\begin{cases}130x, & 0\leqslant x\leqslant 700,\\ 91000+117(x-700), & 700<x\leqslant 1000.\end{cases}$

3. 已知需求函数为 $P=10-\frac{Q}{5}$,成本函数为 $C=50+2Q$,P,Q 分别表示价格和销售量. 写出利润 L 与销售量 Q 的关系,并求平均利润$\left(\text{单位产品获得的利润}\frac{L}{Q}\right)$.

解 $L(Q)=R(Q)-C(Q)=QP-C(Q)=Q\left(10-\frac{Q}{5}\right)-(50+2Q)=8Q-\frac{Q^2}{5}-50$,

$\overline{L(Q)}=\frac{R(Q)-C(Q)}{Q}=8-\frac{Q}{5}-\frac{50}{Q}$.

4. 已知需求函数 Q_d 和供给函数 Q_s 分别为 $Q_d=\frac{100}{3}-\frac{2}{3}P$，$Q_s=20+10P$，求相应的市场均衡价格(需求量与供给量相等时的价格即为均衡价格).

解 由 $Q_d=Q_s$，即 $\frac{100}{3}-\frac{2P}{3}=20+10P$，得 $P=\frac{5}{4}$.

习题 1.4

1. 下列各数列是否收敛，若收敛，试指出其收敛于何值.

(1) $\{2^n\}$； (2) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$； (3) $\{(-1)^{n+1}\}$； (4) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$；

(5) $x_n=\frac{1}{3^n}$； (6) $x_n=2+\frac{1}{n^2}$； (7) $x_n=(-1)^n n$； (8) $x_n=\frac{1+(-1)^n}{1000}$.

解 (1) 数列 $\{2^n\}$，即为 $2,4,8,\cdots,2^n,\cdots$. 易见，当 n 无限增大时，2^n 也无限增大，故该数列是发散的；

(2) 数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$，即为 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$. 易见，当 n 无限增大时，$\frac{1}{n}$ 无限接近于 0，故该数列是收敛于 0；

(3) 数列 $\{(-1)^{n+1}\}$，即为 $1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$. 易见，当 n 无限增大时，$(-1)^{n+1}$ 无休止地反复取 $1,-1$ 两个数，而不会接近于任何一个确定的常数，故该数列是发散的；

(4) 数列 $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$，即为 $0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n-1}{n},\cdots$. 易见，当 n 无限增大时，$\frac{n-1}{n}$ 无限接近于 1，故该数列是收敛于 1.

(5) 0；

(6) 2；

(7) 不存在；

(8) 不存在.

2. 是非题，若非，请举例说明.

(1) 设在常数 a 的无论怎样小的 ε 邻域内存在着 $\{x_n\}$ 的无穷多点，则 $\{x_n\}$ 的极限为 a. ( )

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. ( )

(3) 设 $x_n=0.11\cdots1$(n 个)，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{9}$. ( )

(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，而 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 不存在. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)$ 不存在. ( )

(5) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，而 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 不存在. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)$ 不存在. ( )

(6) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}v_n$ 都存在，且满足 $u_n<v_n(n=1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n<\lim\limits_{n\to\infty}v_n$. ( )

解 (1) (×). 例如 $x_n=1+\frac{(-1)^n n}{2n+1}$，$a=\frac{3}{2}$.

(2) (√).

(3) (√).

(4) (√).

(5) (×). 例如 $x_n=\frac{1}{n}$，$y_n=\sin n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n=0$ 存在.

(6) (×). 例如 $u_n=\frac{1}{n^2+1}$，$v_n=\frac{1}{n}$，$u_n<v_n(n=1,2,\cdots)$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

3. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$. 举例说明反之未必成立.

证明 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 所以任给 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$. 又 $\big||x_n|-|a|\big|\leqslant$

$|x_n-a|<\varepsilon(n>N)$时，所以$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

例如，数列 $1,-1,1,-1,\cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^{n-1}|=1$，但$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}$不存在.

4．求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

注 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

5．证明数列 $x_n=(-1)^{n+1}$是发散的.

证明 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由定义，对于$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，$\exists N>0$，使得当 $n>N$ 时，恒有$|x_n-a|<\dfrac{1}{2}$，即当 $n>N$ 时，$x_n\in\left(a-\dfrac{1}{2},a+\dfrac{1}{2}\right)$，区间长度为 1．而 x_n 无休止地反复取 $1,-1$ 两个数，不可能同时位于长度为 1 地区间．因此该数列是发散的.

注 此例同时也表明：有界数列不一定收敛.

提高题

1．用数列极限定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+2n}{1-3n}=-\dfrac{2}{3}$； (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2}{n^2+n+1}=1$.

证明 (1) 由于$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，所以任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right]$，当 $n>N$ 时，$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$．所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

(2) 由于$\left|\dfrac{5+2n}{1-3n}-\left(-\dfrac{2}{3}\right)\right|=\left|\dfrac{17}{3(1-3n)}\right|=\left|\dfrac{17}{9n-3}\right|(n\geqslant1)$，只要$\dfrac{17}{9n-3}<\varepsilon$，解得 $n>\dfrac{17}{9\varepsilon}+\dfrac{1}{3}$．因此，对任给的 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{17}{9\varepsilon}+\dfrac{1}{3}\right]$，则 $n>N$ 时，$\left|\dfrac{5+2n}{1-3n}-\left(-\dfrac{2}{3}\right)\right|<\varepsilon$ 成立，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+2n}{1-3n}=-\dfrac{2}{3}$.

(3) 由于$\left|\dfrac{n^2-2}{n^2+n+1}-1\right|=\dfrac{3+n}{n^2+n+1}<\dfrac{n+n}{n^2}=\dfrac{2}{n}(n>3)$，要使$\left|\dfrac{n^2-2}{n^2+n+1}-1\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{2}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{2}{\varepsilon}$，因此，对任给的 $\varepsilon>0$，取 $N=\max\left\{3,\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]\right\}$，当 $n>N$ 时，有$\left|\dfrac{n^2-2}{n^2+n+1}-1\right|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2}{n^2+n+1}=1$.

2．若数列$\{x_n\}$有界，又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证明 因为$\{x_n\}$有界，所以存在 $M>0$，使得$|x_n|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$．又因为$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，所以对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时有$|y_n|<\dfrac{\varepsilon}{M}$，而$|x_ny_n|=|x_n||y_n|\leqslant M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$．所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

3．设有两个数列$\{u_n\}$与$\{v_n\}$，已知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=a\neq0$，又$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$.

证明 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=a\neq0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{u_n}{v_n}}=\dfrac{1}{a}$，所以$\left\{\dfrac{v_n}{u_n}\right\}$有界，而 $v_n=\dfrac{v_n}{u_n}\cdot u_n$ 由数列极限的定义及性质和上一题可知$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$.

4．证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则存在正整数 N，当 $n>N$ 时，不等式$|x_n|>\dfrac{|A|}{2}$成立.

证明 因$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，由数列极限的 ε-N 定义知，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，恒有$|x_n-A|<\varepsilon$．由于$||x_n|-|A||\leqslant|x_n-A|$，故 $n>N$ 时，恒有$||x_n|-|A||\leqslant\varepsilon$，从而有$|A|-\varepsilon<|x_n|<|A|+\varepsilon$，由此可

见，只要取 $\varepsilon=\frac{|A|}{2}$，则当 $n=N$ 时，恒有 $|x_n|>\frac{|A|}{2}$. 证毕.

5. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{x_n}{n^2}=0$.

证明　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，存在 $M>0$ 有 $|x_n|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$. 又因为 $\left|n\sin\frac{x_n}{n^2}\right|\leqslant\frac{|x_n|}{n}\leqslant\frac{M}{n}$. 所以对 $\varepsilon>0$ 取 $N=\left[\frac{M}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|a\sin\frac{x_n}{n^2}-0\right|\leqslant\frac{M}{n}<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{x_n}{n^2}=0$.

习题 1.5

1. 设 $y=2x-1$，问 δ 等于多少时，有：当 $|x-4|<\delta$ 时，$|y-7|<0.1$？

解　欲使 $|y-7|<0.1$，即 $|y-7|=|(2x-1)-7|=|2x-8|=2|x-4|<0.1$，从而 $|x-4|<\frac{0.1}{2}=0.05$，即当 $\delta=0.05$ 时，有：当 $|x-4|<\delta$ 时，$|y-7|<0.1$(如图 1-3 所示).

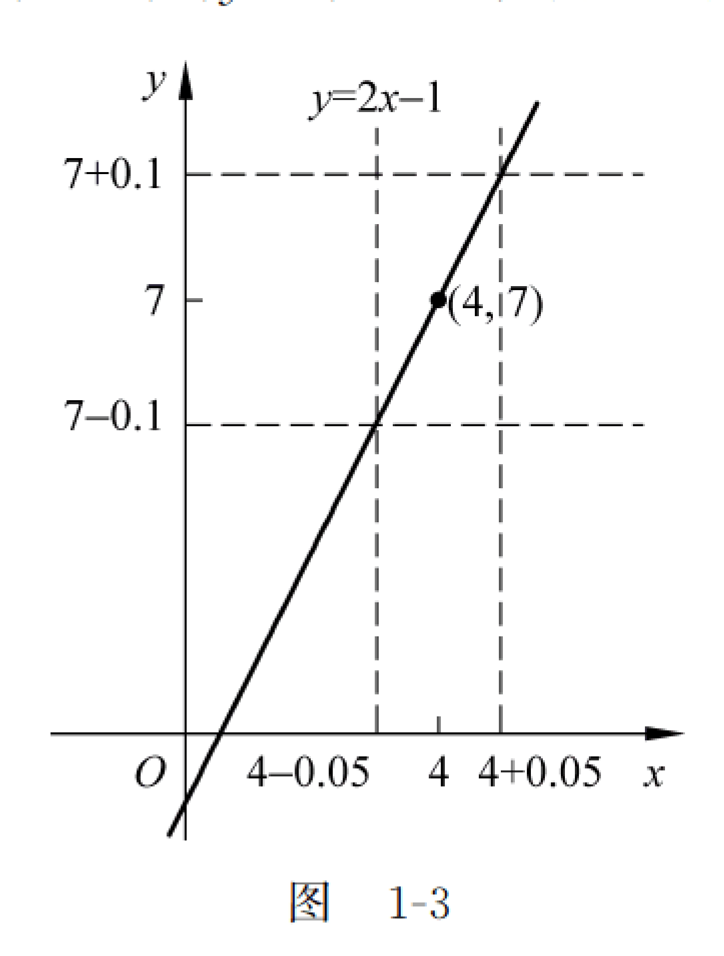


图　1-3

2. 设 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<1,\\ 0, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 问 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 是否存在？画出 $y=f(x)$ 的图形.

解　由图形可知：$\lim\limits_{x\to 1^-}(2x-1)=1$，而 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}0=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在.

3. 验证 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 不存在.

证明　$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$；$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$. 左右极限存在但不相等. 所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

4. 设 $f(x)=\frac{1-a^{\frac{1}{x}}}{1+a^{\frac{1}{x}}}(a>0)$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解　$f(x)$ 在 $x=0$ 处没有定义，而

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{a^{-\frac{1}{x}}-1}{a^{-\frac{1}{x}}+1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-a^{-\frac{1}{x}}}{a^{-\frac{1}{x}}}=-1,\qquad \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-a^{\frac{1}{x}}}{1+a^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{1}=1,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

5. 判断极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 是否存在，并说明理由.

解　由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

提高题

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，证明在 x_0 的某一个去心邻域内 $f(x)>0$.

证明 因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，由极限定义，取 $\varepsilon=\dfrac{A}{2}$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\dfrac{A}{2}$，即 $0<\dfrac{A}{2}=A-\dfrac{A}{2}<f(x)<A+\dfrac{A}{2}$，所以 $f(x)>0(0<|x-x_0|<\delta)$.

习题 1.6

1. 选择题

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-\sin x}{2x^2+\sin x}$(　　).

A. 不存在　　B. 0　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{2}$

(2) 设 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{2e^{-\frac{1}{x}}+1}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$(　　).

A. ∞　　B. 不存在　　C. 0　　D. $\dfrac{1}{2}$

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\leqslant 1,\\ 3+x, & x>1;\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^3, & x\leqslant 1,\\ 2x-1, & x>1.\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 1}f[g(x)]$(　　).

A. -1　　B. 1　　C. 4　　D. 不存在

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+a)x^4+bx^3+2}{x^3+x^2-1}=-2$，则 a,b 的值分别为(　　).

A. $a=-3,b=0$　　B. $a=0,b=-2$　　C. $a=-1,b=0$　　D. $a=-1,b=-2$

(5) 设 $0<a<b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=$(　　).

A. 1　　B. 0　　C. a　　D. b

答案 (1) D；(2) B；(3) D；(4) D；(5) D.

2. 求下列各式的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+1)^{70}(8x-1)^{30}}{(5x+2)^{100}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$；　(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$；

(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$；　(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$；　(6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}$；

(7) $\lim\limits_{t\to 1}\left(\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{2}{1-t^2}\right)$；　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$；　(9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$；

(10) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$；　(11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$；　(12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})}{(1-x)^3}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+1)^{70}(8x-1)^{30}}{(5x+2)^{100}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(3+\dfrac{1}{x}\right)^{70}\left(8-\dfrac{1}{x}\right)^{30}}{\left(5+\dfrac{2}{x}\right)^{100}}=\dfrac{3^{70}8^{30}}{5^{100}}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3(2x+1)-x^2(2x^2-1)}{(2x^2-1)(2x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2}{(2x^2-1)(2x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{4x^3}=\dfrac{1}{4}$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}}}}=1$.

或用抓大头 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$.

(4) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}(2x+h)=2x$.

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{1}{2}$.

(6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(2x+1)}{x-1}=3$.

(7) $\lim\limits_{t\to1}\left(\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{2}{1-t^2}\right)=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{t-1}{1-t^2}=-\dfrac{1}{2}$.

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{2}}=2$.

(9) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$.

(10) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim\limits_{x\to1}-\dfrac{x+2}{x^2+x+1}=-1$.

(11) $x\to1$ 时，分子和分母的极限都是零$\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$. 先约去不为零的无穷小因子 $x-1$ 后再求极限.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}.\text{（消去零因子法）}$$

(12) 因分母的极限为 0，故不能应用极限运算法则，而要先对函数做必要的变形，因分子中含有根式，通常用根式有理化，然后约去分子分母中的公因子.

$$\lim_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})}{(1-x)^3}=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)(1-x)(1-x)}{(1-x)^3(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(1+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x^3})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(1+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x^3})}=\frac{1}{24}.$$

3. 设 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}=m$，试求 a 及 m 的值.

解 因为 $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to-1}(x^3-ax^2-x+4)=-1-a+1+4=0$，故 $a=4$. 于是

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3-4x^2-x+4}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-5x+4)}{x+1}=10,\quad\text{即}\quad m=10.$$

4. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})=2$，求 a,b 之值.

解 因 $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})(5x+\sqrt{ax^2-bx+c})}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(25-a)x^2+bx-c}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(25-a)x+b-\dfrac{c}{x}}{5+\sqrt{a-\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}}}=2,$$

故 $\begin{cases}25-a=0,\\ \dfrac{b}{5+\sqrt{a}}=2,\end{cases}$ 解得 $a=25,b=20$.

5. 已知 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-3}, & x\geqslant3,\\ x+a, & x<3,\end{cases}$ 且 $\lim\limits_{x\to3}f(x)$ 存在，求 a.

解 $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}(x+a)=3+a$，$\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\sqrt{x-3}=0$. 因为 $\lim\limits_{x\to3}f(x)$ 存在，所以 $3+a=0$，从

而 $a=-3$.

6. 已知 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ \dfrac{x^2+3x-1}{x^3+1}, & x\geqslant 0, \end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+3x-1}{x^3+1}=-1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$. 此外，易求得

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-1}{x^3+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x^3}}=0;\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty.$$

提高题

1. 设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则（ ）.

A. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ B. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

C. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ D. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

答案 D.

习题 1.7

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\omega x}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\tan 5x}$； (3) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x$； (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$； (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$； (7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 2x}$； (8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\omega x}{x}=\omega\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\omega x}{\omega x}=\omega$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\tan 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\tan 3x}{3x}}{\dfrac{\tan 5x}{5x}}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{5}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=1$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x\sin x}=2$.

(5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{x-a}=\cos a$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)}=1$.

另法：令 $y=\arcsin x$，则有 $x=\sin y$，且当 $x\to 0$ 时，$y\to 0$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y}=1$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{\sin 2x}{x}}{1+\dfrac{\sin 2x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2\dfrac{\sin 2x}{2x}}{1+2\dfrac{\sin 2x}{2x}}=\dfrac{1-2}{1+2}=-\dfrac{1}{3}$.

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=4$.

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+2x)^{\frac{1}{x}}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$； (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$； (5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{2+x}\right)^{2x}$； (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^{x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\ln[\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2=2$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=e^2$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{\frac{2x}{3}\cdot\frac{3}{2}+1}}{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{1}{2}+1}}=\frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}=e$.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{2+x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x}\right]^2=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2-2}\right]^2$

$$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]^2\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{-4}=e^2.$$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)^{x^2-1}\right]^{\frac{x}{x^2-1}}=e^0=1$.

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)$； (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$.

解 (1) 因为$\frac{n}{n+\sqrt{n}}<\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}<\frac{n}{n+\sqrt{1}}$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{1}}=1$，所以由夹逼准则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=1$.

(2) 因为$\frac{n^2}{n^2+n\pi}<n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+2\pi}\right)<\frac{n^2}{n^2+\pi}$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=1$；$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=1$，所以由夹逼准则$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$.

(3) 因为$\frac{1}{2}=\frac{\sqrt[n]{1}}{2}\leqslant\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}\leqslant\frac{\sqrt[n]{3}}{2}$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3}}{2}=\frac{1}{2}$，所以由夹逼准则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}=\frac{1}{2}$.

(4) 由$(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}$，易见对任意自然数 n，有

$$1<1+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n<3,$$

故 $3\cdot 1^{\frac{1}{n}}<3\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}<3\cdot 3^{\frac{1}{n}}$. 而$\lim\limits_{n\to\infty}3\cdot 1^{\frac{1}{n}}=3$，$\lim\limits_{n\to\infty}3\cdot 3^{\frac{1}{n}}=3$，所以

$$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}3\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}=3.$$

(5) 设 $x_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}$. 显然

$$\frac{n+1}{4n^2}=\frac{1}{(2n)^2}+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}<x_n<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}=\frac{n+1}{n^2}.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{4n^2}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2}=0$，由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)=0.$$

(6) 由 $\dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n}{n\cdot n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}<\dfrac{1\cdot2\cdot n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}{n\cdot n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}=\dfrac{2}{n^2}$，易见 $0<\dfrac{n!}{n^n}<\dfrac{2}{n^2}$. 又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}=0$. 所以由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^2}=0$.

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\sec\dfrac{\pi x}{2}$；　(3) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2x)^{\cot^2x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$；　(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^{x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1.$

(2) 令 $1-x=t$，则 $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\sec\dfrac{\pi x}{2}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{\sin\dfrac{\pi t}{2}}=\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\dfrac{\pi t}{2}}{\sin\dfrac{\pi t}{2}}=\dfrac{2}{\pi}.$

(3) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2x)^{\cot^2x}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+3\tan^2x)^{\frac{1}{3\tan^2x}}\right]^3=e^3.$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{4}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-4}}\right]^{-4}\cdot\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{-1}=e^{-4}.$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x^2-1}\right)^{x^2-1}\right]^{\frac{x^2}{x^2-1}}=e.$

提高题

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}(\cos2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$；

(4) $\lim\limits_{x\to0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$；　(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$；　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}(\cos2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=\lim\limits_{x\to0}(1+\cos2x+2x\sin x-1)^{\frac{1}{x^4}}$

$$=\lim_{x\to0}\left[(1+\cos2x+2x\sin x-1)^{\frac{1}{\cos2x+2x\sin x-1}}\right]^{\frac{\cos2x+2x\sin x-1}{x^4}}$$

$$=e^{\frac{1}{3}}.$$

注 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos2x+2x\sin x-1}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\sin x-2\sin^2x}{x^4}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{x-\sin x}{x^3}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=2\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}.$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$ 在下一节将学到.

(2) 令 $\sqrt[n]{n}=1+r_n(r_n\geqslant0)$，则

$$n=(1+r_n)^n=1+nr_n+\frac{n(n-1)}{2!}r_n^2+\cdots+r_n^n>\frac{n(n-1)}{2!}r_n^2\ (n>1)，因此，0\leqslant r_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+r_n)=1+\lim\limits_{n\to\infty}r_n=1.$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}x\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}=3.$$

同理 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=1$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=3-1=2.$

(4) 解法一　原式 $=\lim\limits_{x\to0}[(\sin x+\cos x)^2]^{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+\sin2x)^{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{x\to0}[(1+\sin2x)^{\frac{1}{\sin2x}}]^{\frac{\sin2x}{2x}}=\mathrm{e}.$

解法二　令 $y=(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$，则有 $\ln y=\dfrac{1}{x}\ln(\sin x+\cos x)$，而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin x+\cos x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}=1$，所以原式 $=\mathrm{e}$.

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{4}.$$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{(-1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n\cdot\frac{(-1)^n}{n}}=\mathrm{e}^0=1.$

2. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限；(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(1) **证明**　$x_2=\sin x_1<x_1,\cdots,x_{n+1}=\sin x_n<x_n$，且 $0<x_n<\pi$，故 $\{x_n\}$ 单调有界，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，在数列递推公式 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两端取极限，得

$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$，即有 $l=\sin l$，得 $l=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2) **解**　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$ 是 1^∞ 型极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sin x_n}{x_n}-1\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sin x_n-x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\cdot\frac{\sin x_n-x_n}{x_n}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\cdot\frac{\sin x_n-x_n}{x_n}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}.$$

$\left(\text{本题用到 }\sin x-x\sim-\dfrac{1}{6}x^3\right)$

3. 设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限.

证明　因为 $0<x_1<3$，知 $x_1(3-x_1)$ 均为正数，因此有

$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\dfrac{x_1+(3-x_1)}{2}=\dfrac{3}{2}$　(算术平均数大于等于几何平均数).

设 $0<x_k\leqslant\dfrac{3}{2}(k>1)$，则 $0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\leqslant\dfrac{x_k+(3-x_k)}{2}=\dfrac{3}{2}$.

由数学归纳法，对任意的正整数 $n>1$，均有 $0<x_n\leqslant\dfrac{3}{2}$，因而数列 $\{x_n\}$ 有界.

又 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{\sqrt{3x_n-x_n^2}}{x_n}=\sqrt{\dfrac{3}{x_n}-1}\geqslant\sqrt{2-1}=1$，故知 $x_{n+1}\geqslant x_n\{x_n\}$ 单调增加有界，从而 $\{x_n\}$ 的极限存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，在 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两边取极限，得 $l=\sqrt{l(3-l)}$，解得 $l=0$ 或 $l=\dfrac{3}{2}$. 因 $0<x_n\leqslant\dfrac{3}{2}$ 且

单调增加，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{3}{2}$. 舍去 $l=0$.

4. 设 $u_1=1, u_2=2, n\geqslant 3$ 时，$u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$.

(1) 求证：$\dfrac{3}{2}u_{n-1}<u_n<2u_{n-1}$；　　(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{u_n}$.

证明　(1) 因为 $u_1=1, u_2=2$，当 $n\geqslant 3$ 时，$u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$，所以，$u_n>0$. 又 $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}>u_{n-1}$，所以，$\{u_n\}$单调增加.

$$u_n=u_{n-1}+u_{n-2}<2u_{n-1}\ (n\geqslant 3),\qquad u_n=u_{n-1}+u_{n-2}>u_{n-1}+\frac{1}{2}u_{n-1}=\frac{3}{2}u_{n-1}\ (n\geqslant 3),$$

所以，$\dfrac{3}{2}u_{n-1}<u_n<2u_{n-1}$.

(2) 由(1)知：$\dfrac{3}{2}u_{n-1}<u_n$，所以

$$0<\frac{1}{u_n}<\frac{2}{3u_{n-1}}<\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{u_{n-2}}<\cdots<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{u_1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{u_n}=0$.

习题 1.8

1. 举例说明：在某极限过程中，两个无穷小量之商、两个无穷大量之商、无穷小量与无穷大量之积都不一定是无穷小量，也不一定是无穷大量.

解　例 1，当 $x\to 0$ 时，$\tan x$，$\sin x$ 都是无穷小量，但由 $\dfrac{\sin x}{\tan x}=\cos x$（当 $x\to 0$ 时，$\cos x\to 1$）不是无穷大量，也不是无穷小量.

例 2，当 $x\to\infty$ 时，$2x$ 与 x 都是无穷大量，但 $\dfrac{2x}{x}=2$ 不是无穷大量，也不是无穷小量.

例 3，当 $x\to 0^+$ 时，$\tan x$ 是无穷小量，而 $\cot x$ 是无穷大量，但 $\tan x\cdot\cot x=1$ 不是无穷大量，也不是无穷小量.

2. 判断下列命题是否正确：

(1) 无穷小量与无穷小量的商一定是无穷小量；

(2) 有界函数与无穷小量之积为无穷小量；

(3) 有界函数与无穷大量之积为无穷大量；

(4) 有限个无穷小量之和为无穷小量；

(5) 有限个无穷大量之和为无穷大量；

(6) $y=x\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin x\neq\infty$；

(7) 无穷大量的倒数都是无穷小量；

(8) 无穷小量的倒数都是无穷大量.

解　(1) 错误，例如，第 1 题例 1.

(2) 正确.

(3) 错误. 例如，当 $x\to 0$ 时，$\cot x$ 为无穷大量，$\sin x$ 是有界函数，$\cot x\cdot\sin x=\cos x$ 不是无穷大量.

(4) 正确.

(5) 错误. 例如，当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 与 $-\dfrac{1}{x}$ 都是无穷大量，但它们之和 $\dfrac{1}{x}+\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0$ 不是无穷大量.

(6) 正确. 因为 $\forall M>0$，$\exists$ 正整数 k，使 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}>M$，从而 $f\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}>M$，即 $y=x\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界. 又 $\forall M>0$，无论 X 多么大，总存在正整数 k，使 $k\pi>X$，

使 $f(2k\pi)=k\pi\sin(k\pi)=0<M$，即 $x\to+\infty$ 时，$|x\sin x|$ 不无限增大，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin x\neq\infty$.

(7) 正确.

(8) 错误. 只有非零的无穷小量的倒数才是无穷大量. 零是无穷小量，但其倒数无意义.

3. 指出下列函数哪些是该极限过程中的无穷小量，哪些是极限过程中的无穷大量.

(1) $f(x)=\dfrac{3}{x^2-4}, x\to2$； (2) $f(x)=\ln x, x\to1, x\to0^+, x\to+\infty$；

(3) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}, x\to0^+, x\to0^-$； (4) $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan x, x\to+\infty$；

(5) $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin x, x\to\infty$； (6) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}, x\to\infty$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to2}(x^2-4)=0$，即 $x\to2$ 时，x^2-4 是无穷小量，所以 $\dfrac{1}{x^2-4}$ 是无穷大量，因而 $\dfrac{3}{x^2-4}$ 也是无穷大量.

(2) 从 $f(x)=\ln x$ 的图像可以看出，$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$，$\lim\limits_{x\to1}\ln x=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$，所以，当 $x\to0^+$ 时，$x\to+\infty$ 时，$f(x)=\ln x$ 是无穷大量；当 $x\to1$ 时，$f(x)=\ln x$ 是无穷小量.

(3) 从 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 的图可以看出，$\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，所以，当 $x\to0^+$ 时，$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 是无穷大量；当 $x\to0^-$ 时，$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 是无穷小量.

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)=0$，所以当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan x$ 是无穷小量.

(5) 因为当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小量，$\sin x$ 是有界函数，所以 $\dfrac{1}{x}\sin x$ 是无穷小量.

(6) 因为当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x^2}$ 是无穷小量，$\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 是有界变量，所以 $\dfrac{1}{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 是无穷小量.

4. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\sin x$，而当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小量，$\sin x$ 是有界量($|\sin x|\leqslant1$)，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

5. 当 $x\to0$ 时，判断下列各无穷小对无穷小 x 的阶：

(1) $\sqrt{x}+\sin x$； (2) $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}$； (3) $\sqrt[3]{x}-3x^3+x^5$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x}+\sin x}{\sqrt{x}}=1$，所以当 $x\to0$ 时 $\sqrt{x}+\sin x$ 是 x 的 $\dfrac{1}{2}$ 阶无穷小.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to0}(x^{\frac{1}{6}}-1)=-1$，所以当 $x\to0$ 时 $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}$ 是 x 的 $\dfrac{1}{2}$ 阶无穷小.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x}-3x^3+x^5}{\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1-3x^{\frac{8}{3}}+x^{\frac{14}{3}})=1$，所以当 $x\to0$ 时是 x 的 $\dfrac{1}{3}$ 阶无穷小.

6. 比较下列各组无穷小：

(1) 当 $x\to1$ 时，$\dfrac{1-x}{1+x}$ 与 $1-\sqrt{x}$； (2) 当 $x\to0$ 时，$(1-\cos x)^2$ 与 $\sin^2 x$；

(3) 当 $x\to1$ 时，$1-x$ 与 $1-\sqrt[3]{x}$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1-x}{1+x}}{1-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1+x)(1-\sqrt{x})}=1$，所以当 $x\to1$ 时，$\dfrac{1-x}{1+x}\sim1-\sqrt{x}$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)^2}{x_2}=0$. 故 $(1-\cos x)^2$ 为比 $\sin^2 x$ 高阶的无穷小.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}=\lim\limits_{x\to1}(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})=3$, 所以,无穷小 $1-x$ 是 $1-\sqrt[3]{x}$ 的同阶无穷小.

7. 利用等价无穷小代换,求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}$;　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$;　(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin2x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$;　(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(x+1)}$;　(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{a}-1)$;　(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(a+x)+\ln(a-x)-2\ln a}{x^2}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{2x}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2}x\cos\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{2x^2}=3\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}}{2x^2}=\dfrac{3}{4}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x\tan x}==\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\dfrac{1-\cos x}{\cos x}}{\sin x\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\tan x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}}{x}=0$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(x+1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{x}=2$;

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x^2}{3}}{x^2}=\dfrac{1}{3}$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{a}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(e^{\frac{1}{n}\ln a}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\ln a}{n}=0$;

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(a+x)+\ln(a-x)-2\ln a}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\dfrac{a^2-x^2}{a^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{x^2}{a^2}}{x^2}=-\dfrac{1}{a^2}$.

8. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{e^{3x}-1}=2$,求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to0}(e^{3x}-1)=0$,所以,$2=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}f(x)\sin2x}{3x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}f(x)$, 所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=6$.

提高题

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{100}+3x^2+2}{e^x+8}(2+\cos x)=$________.

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{100}+3x^2+2}{e^x+8}=0$,$2+\cos x$ 有界,故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{100}+3x^2+2}{e^x+8}(2+\cos x)=0$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3+\ln(1+x^5)}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{x^2}{2}}{3x^2}=-\dfrac{1}{6}.$

3. 当 $x\to 0$ 时,函数 $e^{\tan x}-e^{\sin x}$ 与 x^n 是同阶的无穷小量,则 $n=$________.

解 $e^{\tan x}-e^{\sin x}=e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)\sim\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$,所以 $n=3$.

4. 当 $x\to 0^+$ 时,若 $\ln^\alpha(1+2x)$,$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小,求 α 的取值范围.

解 $\ln^\alpha(1+2x)\sim(2x)^\alpha=2^\alpha x^\alpha$, $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}\sim\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}x^{\frac{2}{\alpha}}$.

根据题意知,$x^\alpha=o(x)$, $x^{\frac{2}{\alpha}}=o(x)$,则有 $\alpha>1$ 且 $\dfrac{2}{\alpha}>1$,所以 $1<\alpha<2$.

5. 设 $a_1=x(\cos\sqrt{x}-1)$,$a_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$,$a_3=\sqrt[3]{x+1}-1$.当 $x\to 0^+$ 时,以上3个无穷小量按照从低阶到高阶顺序排列.

解 $a_1=x(\cos\sqrt{x}-1)\sim x\cdot\left(-\dfrac{1}{2}(\sqrt{x})^2\right)=-\dfrac{1}{2}x^2$,

$a_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})\sim\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}=x^{\frac{5}{6}}$, $a_3=\sqrt[3]{x+1}-1=(1+x)^{\frac{1}{3}}-1\sim\dfrac{1}{3}x$.

则3个无穷小量从低阶到高阶排列为 a_2,a_3,a_1.

6. 当 $x\to 0^+$ 时, $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ 与 $1-\cos x^\alpha$ 是同阶无穷小量,求 α.

解 $\sqrt{x+\sqrt{x}}\sim x^{\frac{1}{4}}$,$1-\cos x^\alpha\sim\dfrac{1}{2}x^{2\alpha}$,则 $2\alpha=\dfrac{1}{4}$,$\alpha=\dfrac{1}{8}$.

7. 根据定义证明:当 $x\to 0$ 时,$y=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 为无穷小.

证明 $\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|x^2\sin\dfrac{1}{x}-0\right|=|x^2|\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant x^2<\varepsilon$,只需 $|x|<\sqrt{\varepsilon}$.取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$,则当 $0<|x-0|<\delta$ 时,恒有 $\left|x^2\sin\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

8. 证明:函数 $y=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 上无界,但当 $x\to 0^+$ 时,该函数不是无穷大.

证明 对于任意给定的正数 M,取 $x=\dfrac{1}{k\pi}(k\in\mathbf{N})$,则 $\left|\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}\right|=k\pi$.

只要 $k>\dfrac{M}{\pi}$,就有 $\left|\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}\right|>M$,这表明 $y=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上无界.但它不是无穷大.因为对于任意给定的正数 M,取 $x=\dfrac{1}{k\pi+\dfrac{\pi}{2}}(k\in\mathbf{N})$,则 $\left|\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}\right|=0$ 不大于 M.

9. 设函数 $y=\dfrac{1+2x}{x}$,问 x 应满足什么条件能使 $|y|>10^4$?并证明 $x\to 0$ 时该函数是无穷大.

解 因为 $\left|\dfrac{1+2x}{x}\right|\geqslant 2+\dfrac{1}{|x|}$,要使 $\left|\dfrac{1+2x}{x}\right|>10^4$,只要 $2+\dfrac{1}{|x|}>10^4$,即 $|x|<\dfrac{1}{10^4-2}$.对于任意给定的正数 M,要使 $\left|\dfrac{1+2x}{x}\right|>M$,只要 $2+\dfrac{1}{|x|}>M$,即 $|x|<\dfrac{1}{M-2}$.这表明 $x\to 0$ 时函数是无穷大.

10. 设 α,β 是无穷小,证明:如果 $\alpha\sim\beta$,则 $\beta-\alpha=o(\alpha)$;反之,如果 $\beta-\alpha=o(\alpha)$,则 $\alpha\sim\beta$.

证明 设 $\alpha\sim\beta$,则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$,故 $\lim\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim\left(\dfrac{\beta}{\alpha}-1\right)=0$,故 $\beta-\alpha=o(\alpha)$.

设 $\beta-\alpha=o(\alpha)$，则 $\lim\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)=0$，所以 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，即 $\alpha\sim\beta$.

习题 1.9

1. 研究下列函数的连续性：

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2;\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x<-1,x>1.\end{cases}$

解　(1) $f(x)$在$[0,1]$与$(1,2]$上连续. 又 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x^2=1$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(2-x)=1$，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续. 从而 $f(x)$在$[0,2]$上连续.

(2) $f(x)$在$(-\infty,-1)$，$[-1,1]$，$(1,+\infty)$上连续. 又 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x=1$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}1=1$，故 $f(x)$在 $x=1$ 处连续；$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}1=1$，$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}x=-1$，故 $f(x)$在 $x=-1$ 处不连续. 即 $f(x)$在$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$上连续.

2. 常数 C 为何值时，可使函数 $f(x)=\begin{cases}Cx+1, & x\leqslant 3,\\ Cx^2-1, & x>3\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续.

解　$f(x)$在$(-\infty,3)$，$[3,+\infty)$上连续. 在 $x=3$ 处，$\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}(Cx+1)=3C+1$，$\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}(Cx^2-1)=9C-1$，因 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，所以 $3C+1=9C-1$，即 $C=\frac{1}{3}$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ a+x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 应当怎样选择数 a，使 $f(x)$成为在$(-\infty,+\infty)$上连续的函数？

解　要使函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，则函数 $f(x)$必在 $x=0$ 处连续. 故 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^x=1=f(0)=a$. 因此，当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}, & x\neq 0,\\ k, & x=0,\end{cases}$ 求 k 值使得 $f(x)$在点 $x=0$ 处连续.

解　因为$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x}=2$. 所以当 $k=f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$ 时，$f(x)$在点 $x=0$ 处连续.

5. 问 a 取何值时，$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ a+x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

解　因为 $f(0)=a$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\cos x=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(a+x)=a$. 要使 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$，必须 $a=1$. 故当且仅当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$在 $x=0$ 处连续.

6. 讨论 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\geqslant 0,\\ x-2, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解　因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+2)=2=f(0)$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x-2)=-2\neq f(0)$，右连续，但不左连续，故函数 $f(x)$在点 $x=0$ 处不连续.

7. 指出下列函数的间断点及其所属类型，若是可去间断点，试补充或修改定义，使函数在该点连续.

(1) $y=\frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$；　(2) $y=\arctan\frac{1}{x-1}$；　(3) $y=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$；

(4) $y=\frac{x}{\tan x}$；　(5) $y=\cos^2\frac{1}{x}, x=0$；　(6) $f(x)=\begin{cases}1/x, & x<0,\\ \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x<|x-1|\leqslant 1,\\ x+1, & x>2.\end{cases}$

解 (1) 函数无定义的点为 $x=0$，$x=\pm 1$. 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}=-1$，所以 $x=0$ 为第一类跳跃间断点.

又因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}=\frac{1}{2}$，所以 $x=1$ 为可去间断点，补充定义 $y(1)=\frac{1}{2}$，则函数在 $x=1$ 处连续. 而 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}=\infty$，故 $x=-1$ 为第二类无穷间断点.

(2) 函数无定义的点为 $x=1$. $\lim\limits_{x\to 1^+}\arctan\frac{1}{x-1}=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to 1^-}\arctan\frac{1}{x-1}=-\frac{\pi}{2}$，所以 $x=1$ 为第一类跳跃间断点.

(3) $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$，故函数无定义的点为 $x=1$，$x=2$. 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=-2$，故 $x=1$ 为可去间断点，补充 $y(1)=-2$，则函数在 $x=1$ 处连续. 又 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\infty$，所以 $x=2$ 为无穷间断点.

(4) 函数无定义的点为 $x=k\pi$，$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$. 当 $k=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=0$，故 $x=0$ 为可去间断点，补充 $y(0)=1$，则函数在 $x=0$ 处连续；

当 $k\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to k\pi}\frac{x}{\tan x}=\infty$，故 $x=k\pi$ 是无穷间断点；

$\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}=0$，故 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 是可去间断点，补充 $y\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0$，则函数在 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 处连续.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\cos^2\frac{1}{x}$ 不存在，故 $x=0$ 是函数的第二类间断点.

(6) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，且在 $(-\infty,1)$，$(0,1)(1,2)(2,+\infty)$ 中 $f(x)$ 都是初等函数，因而 $f(x)$ 的间断点只可能在 $x_1=0$，$x_2=1$，$x_3=2$ 处.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\infty$，因此 $x_1=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点(无穷间断点)；

由于 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$，且 $f(x)$ 在 $x_2=1$ 处无定义，因此 $x_2=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点；

由于 $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2-1}{x-1}=3$，$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x+1)=3$，$f(2)=3$，因此 $x_3=2$ 是 $f(x)$ 的连续点.

8. 设 $f(x)$ 在点 x_0 连续，$g(x)$ 在点 x_0 不连续，问 $f(x)+g(x)$ 及 $f(x)\cdot g(x)$ 在点 x_0 是否连续？若肯定或否定，请给出证明；若不确定试给出例子(连续的例子与不连续的例子).

解 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 肯定不连续，证明如下：若 $f(x)+g(x)$ 在 x_0 连续，因为 $f(x)$ 在点 x_0 连续，故 $g(x)=[f(x)+g(x)]-f(x)$ 在点 x_0 也连续，此与题设矛盾.

$f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 的连续性不能确定. 例如：若 $f(x)\equiv 1$，$g(x)$ 为任一在 x_0 不连续的函数，则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 不连续. 又例：若 $f(x)=x$，$g(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x_0=0$，则 $f(x)$，$g(x)$ 满足题目要求，但 $f(x)\cdot g(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x_0=0$ 处连续.

9. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$；　　(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\tan\left(\ln\frac{4x^2+1}{x^2+4x}\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{e^x}{2x+1}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}2\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$.

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=\sin\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)=\sin\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right)=0$,而

$$\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 1,\quad 故\ \lim_{n\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0.$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\tan\left(\ln\dfrac{4x^2+1}{x^2+4x}\right)=\tan\left[\ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2+1}{x^2+4x}\right)\right]=\tan(2\ln 2)$.

(3) 因为 $(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}=(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot 6}$,所以 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{\frac{x}{\sin x}\cdot 6}=e^6$.

(4) 因为 $f(x)=\dfrac{e^x}{2x+1}$ 是初等函数,且 $x_0=2$ 是其定义区间内的点,所以 $f(x)=\dfrac{e^x}{2x+1}$ 在点 $x_0=2$ 处连续,于是 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x}{2x+1}=\dfrac{e^2}{2\times2+1}=\dfrac{e^2}{5}$.

提高题

1. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 为连续函数,试确定 a 与 b 的值.

解 首先求出 $f(x)$. 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=\begin{cases}\infty, & |x|>1,\\ 1, & |x|=1,\\ 0, & |x|<1,\end{cases}$ 即应分段求出 $f(x)$.

当 $|x|>1$ 时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{-1}+ax^{2-2n}+bx^{1-2n}}{x^{-2n}+1}=\dfrac{1}{x}$;

当 $|x|<1$ 时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{ax^2+bx}{1}=ax^2+bx$. 于是得

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & |x|>1,\\ \dfrac{1}{2}(a+b+1), & x=1,\\ \dfrac{1}{2}(a-b-1), & x=-1,\\ ax^2+bx, & |x|<1.\end{cases}$$

其次,由初等函数的连续性,当 $|x|>1$,$|x|<1$ 时 $f(x)$ 分别为初等函数,故连续.

最后,考察分段函数的连接点 $x=\pm1$ 处的连续性. 根据定义,分别计算

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x}=1,\qquad \lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(ax^2+bx)=a+b;$$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}(ax^2+bx)=a-b,\qquad \lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{x}=-1;$$

$$f(x)在\ x=1\ 连续\Leftrightarrow\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=f(1)\Leftrightarrow a+b=1=\frac{1}{2}(a+b+1)$$
$$\Leftrightarrow a+b=1;$$

$$f(x)在\ x=-1\ 连续\Leftrightarrow\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=f(-1)\Leftrightarrow a-b=-1=\frac{1}{2}(a-b-1)$$
$$\Leftrightarrow a-b=-1.$$

因此 $f(x)$ 在 $x=\pm1$ 均连续 $\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1,\\ a-b=-1\end{cases}\Leftrightarrow a=0,b=1$. 故仅当 $a=0,b=1$ 时 $f(x)$ 处处连续.

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0,\end{cases}$ 问 a 为何值时，$f(x)$在：

(1) $x=0$ 处连续；(2) $x=0$ 为可去间断点；(3) $x=0$ 为跳跃间断点.

解 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=-6a$， $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}=2a^2+4$.

令 $-6a=2a^2+4$，得 $a=-1$ 或 $a=-2$.

当 $a=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=6$，故 $f(x)$在 $x=0$ 处连续.

当 $a=-2$ 时，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=12\neq f(0)=6$，故 $f(x)$在 $x=0$ 处为可去间断点.

当 $a\neq-1$ 且 $a\neq-2$ 时，$f(x)$在 $x=0$ 处为跳跃间断点.

3. 讨论函数 $f(x)=x\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$的连续性，若有间断点，判别其类型.

解 $f(x)=x\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\begin{cases}x, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -x, & |x|>1.\end{cases}$

因为 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(-x)=-1$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x=1$，所以 $x=1$ 为函数的跳跃间断点；

因为 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}x=1$，$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(-x)=-1$，所以 $x=-1$ 为函数的跳跃间断点.

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant0,\\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{n},\end{cases}$ 判断 $x=0$ 是 $f(x)$的连续点还是间断点.

解 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，$f(0)=0$，即 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$，故 $f(x)$在 $x=0$ 处连续.

5. 设 $f(x)$在点 x_0 连续，且 $f(x_0)\neq0$，试证存在 $\delta>0$，使得当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时 $|f(x)|>\dfrac{|f(x_0)|}{2}$.

证明 取 $\varepsilon=\dfrac{|f(x_0)|}{2}>0$. 因 $f(x)$在点 x_0 连续，故存在 $\delta>0$，使 $|x-x_0|<\delta$，即 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon=\dfrac{|f(x_0)|}{2}$，即 $f(x_0)-\dfrac{|f(x_0)|}{2}<f(x)<f(x_0)+\dfrac{|f(x_0)|}{2}$，于是：

(1) 若 $f(x_0)>0$，则 $f(x)>f(x_0)-\dfrac{f(x_0)}{2}=\dfrac{f(x_0)}{2}$.

(2) 若 $f(x_0)<0$，则 $f(x)<-|f(x_0)|+\dfrac{|f(x_0)|}{2}=-\dfrac{|f(x_0)|}{2}$，即 $|f(x)|>\dfrac{|f(x_0)|}{2}$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{1-ax}-1}{x}, & x<0,\\ ax+b, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}, & x>1,\end{cases}$ 为连续函数，求常数 a，b.

解 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt[3]{1-ax}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-\dfrac{1}{3}ax}{x}=-\dfrac{1}{3}a$， $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(ax+b)=b$， $f(0)=b$.

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$，即 $b=-\dfrac{1}{3}a$.

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(ax+b)=b+a,\quad \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{\sin(x-1)}{x-1}=1,\quad f(1)=b+a.$$

因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$，即 $b+a=1$. 又 $b=-\dfrac{1}{3}a$，得 $a=\dfrac{3}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$.

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\leqslant c,\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，求 c.

解 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{x}, & x<-c,\\ x^2+1, & -c\leqslant x\leqslant c,\\ \dfrac{2}{x}, & x>c.\end{cases}$

$$\lim_{x\to c^+}f(x)=\lim_{x\to c^+}\left(-\frac{2}{x}\right)=\frac{2}{c},\quad \lim_{x\to c^-}f(x)=\lim_{x\to c^-}(x^2+1)=c^2+1,\quad f(-c)=f(c)=c^2+1.$$

因为 $f(x)$ 在 $x=c$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to c^-}f(x)=\lim\limits_{x\to c^+}f(x)=f(c)$，即有 $c^2+1=\dfrac{2}{c}$，解得 $c=1$.

习题 1.10

1. 证明方程 $x^3+2x=6$ 至少有一个根介于 1 和 3 之间.

证明 设 $f(x)=x^2+2x-6$，则 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续，且 $f(1)=-3<0$，$f(3)=9>0$，由零点定理，在 $(1,3)$ 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=0$，即方程 $x^2+2x=6$ 在 $(1,3)$ 内至少有一根.

2. 证明方程 $x=a\sin x+b(a>0,b>0)$ 至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

证明 设 $f(x)=a\sin x+b-x$，则 $f(x)$ 在 $[0,a+b]$ 上连续，且

$$f(0)=b>0,f(a+b)=a\sin(a+b)-a=a[\sin(a+b)-1]\leqslant0.$$

若 $f(a+b)=0$，则 $a+b$ 是方程 $x=a\sin x+b$ 的根；

若 $f(a+b)<0$，由零点定理，在 $(0,a+b)$ 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=0$，即 ξ 是方程 $x=a\sin x+b$ 的根. 故方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一个不超过 $a+b$ 的正根.

3. 证明方程 $xe^{x^2}=1$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根.

证明 设 $F(x)=xe^{x^2}-1$，则 $F(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续. 又

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}-1=\frac{1}{2}(e^{\frac{1}{4}}-2)=\frac{1}{2}(\sqrt{\sqrt{e}}-2)<\frac{1}{2}(\sqrt{\sqrt{4}}-2)=\frac{1}{2}(\sqrt{2}-2)<0,$$

$$F(1)=e-1>0.$$

由零点存在定理，$F(x)=0$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内至少有一个实根.

因 $F'(x)=e^{x^2}(1+2x^2)>0$，故 $F(x)=xe^{x^2}-1$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 单调增加，从而 $F(x)=0$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 至多有一个实根，故 $xe^{x^2}=1$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 有且仅有一个实根.

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $0\leqslant f(x)\leqslant1$，证明在 $[0,1]$ 上至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\xi$.

证明 设 $F(x)=x-f(x)$，则由题设 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)=-f(0)\leqslant0$，$F(1)=1-f(1)\geqslant0$.

若 $F(0)=0$ 或 $F(1)=0$，则可取 $\xi=0$ 或 $\xi=1$ 结论成立；否则 $F(0)<0$，$F(1)>0$，由连续函数的零点定理，存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$，证明在 $[0,a]$ 上至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

证明 设 $F(x)=f(x)-f(x+a)$，则 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续且 $F(0)=f(0)-f(a)=f(2a)-f(a)$，$F(a)=f(a)-f(2a)=-F(0)$. 若 $F(0)=0$，则 $\xi=0$ 即为所求；若 $F(0)\neq 0$，则 $F(0)F(a)=-F^2(0)<0$，故由零点定理，存在 $\xi\in(0,a)$ 使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

6. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，则在 $[x_1,x_n]$ 上必有 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

证明 因为 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]\subset[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上有最大值 M 和最小值 m，则 $m\leqslant f(x_i)\leqslant M(i=1,2,\cdots,n)$，从而 $m\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leqslant M$，由介值定理，至少存在一点 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

提高题

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且无零点，证明：存在 $m>0$，使得或者在 $[a,b]$ 上恒有 $f(x)\geqslant m$，或者在 $[a,b]$ 上恒有 $f(x)\leqslant -m$.

证明 若有 $x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)>0$，由闭区间上连续函数的最值定理，设 $f(x)$ 在 $x_1\in[a,b]$ 取最小值 m，则可断定 $m>0$，从而 $f(x)\geqslant m, x\in[a,b]$. 若不然，则 $m<0$，由连续函数介值定理，在 x_0 与 x_1 之间必有一点 ξ，使 $f(\xi)=0$. 此与 $f(x)$ 无零点矛盾.

同法可证，若有 $x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)<0$，则存在 $m>0$，使 $f(x)<-m, x\in[a,b]$（$-m$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上最大值），则 $-m<0$，从而 $m>0$.

2. 若 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，证明 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有界.

证明 设 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$，取 $\varepsilon=1$，由极限定义，存在 $0<\delta<b-a$，使当 $0<b-x<\delta$，即 $x\in(b-\delta,b)$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon=1$，从而 $|f(x)|=|f(x)-A+A|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|$.

又因 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b-\delta]$ 上连续，从而有界，设在 $[a,b-\delta]$ 上，$|f(X)|\leqslant M$，记 $N=\max\{M,|A|+1\}$，则当 $x\in[a,b)$ 时，恒有 $|f(x)|\leqslant N$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$f(a)>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A<0$，证明：在 $[a,+\infty)$ 上至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

证明 只要能找到一点 $x_1>a$，使 $f(x_1)<0$ 便可对 $f(x)$ 在 $[a,x_1]$ 上应用零点定理，得到所需的结论.

因 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A<0$，故对 $\varepsilon_0=\frac{|A|}{2}>0$，存在 $X_0>0$，当 $x>X_0$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon_0$，即 $-\frac{|A|}{2}+A<f(x)<\frac{|A|}{2}+A=\frac{A}{2}<0$. 取实数 $x_1>X_0$，这样 $f(a)>0$，而 $f(x_1)<0$，由零点定理知：在 $(a,+\infty)$ 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=0$. 由于 $(a,x_1)\subset(a,+\infty)$，也就是说在 $(a,+\infty)$ 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

4. 证明方程 $x^5-3x=1$ 在 $(1,2)$ 内至少存在一个实根.

证明 设 $f(x)=x^5-3x-1$，则 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，且 $f(1)=-3$，$f(2)=25$，由零点定理，在 $(1,2)$ 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=0$. 即方程 $x^5-3x=1$ 在 $(1,2)$ 内至少有一根.

5. 证明曲线 $y=-x^4-3x^2+7x+10$ 在 $x=1$ 与 $x=2$ 之间至少与 x 轴有一个交点.

证明 设 $f(x)=-x^4-3x^2+7x+10$，则 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，且 $f(1)=9$，$f(2)=-4$，由零点定理，在 $(1,2)$ 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=0$. 即方程 $-x^4-3x^2+7x+10=0$ 在 $(1,2)$ 内至少有一根，即曲线 $y=-x^4-3x^2+7x+10$ 在 $x=1$ 与 $x=2$ 之间至少与 x 轴有一个交点.

6. 证明在 $(0,2)$ 内至少存在一点 x_0，使得 $e^{x_0}-2=x_0$.

证明 设 $f(x)=e^x-x-2$，则 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $f(0)=-1<0$，$f(2)=e^2-4>0$. 由零点存在

定理知在(0,2)内至少存在一点 x_0,使得 $e^{x_0}-2=x_0$.

复习题 1 解答

1. 是非题

(1) 无界数列必定发散； ( )

(2) 分段函数必存在间断点； ( )

(3) 初等函数在其定义域内必连续； ( )

(4) 若 $f(x)$在 x_0 连续,则必有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$； ( )

(5) 若对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在自然数 N,当 $n>N$ 时,总有无穷多个 u_n 满足 $|u_n-A|<\varepsilon$,则数列$\{u_n\}$必以 A 为极限. ( )

答案 (1)√;(2)×;(3)×;(4)√;(5)×.

2. 填空题

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\sqrt{n-1}=$________.

(2) 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{3^x-1}=5$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$________.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^{2x})^{\frac{1}{\sin x}}=$________.

(4) 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{x}, & x<0,\\ a\cos x+x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$上连续则 $a=$________.

(5) 已知$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=3$,则 $a=$________,$b=$________.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\sqrt{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2-n)\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \quad (\text{抓大头})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}=1.$$

(2) 因为 $x\to 0$ 时分母趋于 0,而整个分式的极限存在,所以分子也趋于 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{3^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)}{\sin 2x}}{x\ln 3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x\cdot x\ln 3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{2\ln 3}=5,$$

故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=10\ln 3$.

(3) 本题属于 1^∞ 型,故$\lim\limits_{x\to 0}(x+e^{2x})^{\frac{1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+e^{2x}-1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+2x}{x}}=e^3$.

$\left(\text{注：因为}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}\neq -1,\text{所以 } x+e^{2x}-1\sim x+2x=3x.\right)$

(4) $f(x)$在 $x=0$ 处连续,则 $f(0-0)=f(0)=f(0+0)$,而

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{x}=2,\qquad f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a\cos x+x^2)=a,$$

则 $a=2$.

(5) 因为 $x\to 1$ 时分母趋于零,而整个分式的极限存在,所以分子也趋于零.

$$\lim_{x\to 1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0,\quad \text{即}\quad a=-1-b.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+(-1-b)x+b}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-b)}{x-1}=1-b=3,$$

则 $b=-2, a=1$.

3. 选择题

(1) 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义，函数 $f(x)$ 在点 x_0 左、右极限都存在且相等是函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的(　　).

A. 充分条件　　B. 充分且必要条件
C. 必要条件　　D. 非充分也非必要条件

(2) 若函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+a, & x\geqslant 1, \\ \cos\pi x, & x<1 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，则 a 的值为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. -2

(3) 若函数 $f(x)$ 在某点 x_0 极限存在，则(　　).

A. $f(x)$ 在 x_0 的函数值必存在且等于极限值　　B. $f(x)$ 在 x_0 函数值必存在，但不一定等于极限值
C. $f(x)$ 在 x_0 的函数值可以不存在　　D. 如果 $f(x_0)$ 存在的话，必等于极限值

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}=$(　　).

A. ∞　　B. 不存在　　C. 1　　D. 0

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=$(　　).

A. e^{-2}　　B. ∞　　C. 0　　D. $\dfrac{1}{2}$

解 (1) C；(2) D；(3) C；(4) C；(5) A.

4. 利用极限定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n-1}=\dfrac{3}{2}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} 0.\underbrace{99\cdots9}_{n个}=1$.

证明 (1) $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{3n+1}{2n-1}-\dfrac{3}{2}\right|=\left|\dfrac{5}{2(2n-1)}\right|\underset{n\geqslant 2}{<}\dfrac{5}{A}<\varepsilon$，只要 $n>\dfrac{5}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\dfrac{5}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\dfrac{3n+1}{2n-1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n-1}=\dfrac{3}{2}$.

(2) $\forall\varepsilon>0$，因 $0.\underbrace{999\cdots9}_{n}=\left|1-\dfrac{1}{10^n}\right|$，要使 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{10^n}<\varepsilon$，即只要 $n>\log_{10}\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\log_{10}\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，恒有 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} 0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

5. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{3}{1^2\times 2^2}+\dfrac{5}{2^2\times 3^2}+\cdots+\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\right]$.

解 (1) 当 $x\to 1$ 时，$\ln(1+\sqrt[3]{x-1})\sim\sqrt[3]{x-1}$，$\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}\sim 2\sqrt[3]{x^2-1}$.

由等价无穷小代换，得 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x+1}}=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}-1}{\ln\sqrt[n]{n}}\xlongequal{令\sqrt[n]{n}-1=x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln(1+x)}=1$.

(3) $\dfrac{1}{n^2+n+n}+\dfrac{2}{n^2+n+n}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}<\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}$

$$<\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+1},$$

所以 $\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}<\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$.

因为$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\frac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2+n+n}\to\frac{1}{2}\quad(n\to\infty)$，　$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\frac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2+n+1}\to\frac{1}{2}\quad(n\to\infty)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=2.$$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{3}{1^2\times2^2}+\frac{5}{2^2\times3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=1$.

6. 设$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{95}(ax+1)^5}{(x^2+1)^{50}}=8$，求 a 的值.

解 因为 $8=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{95}(ax+1)^5}{(x^2+1)^{50}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{95}(ax)^5}{(x^2)^{50}}=a^5$，所以 $a=\sqrt[5]{8}$.

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0,\\ 2x-b, & x\geqslant0\end{cases}$在点 $x=0$ 处连续，求 b 的值.

解 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x^2+1)=1$，　$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(2x-b)=-b$.

因为 $f(x)$点 $x=0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，即 $b=-1$.

8. 求下列函数的间断点，并判断其类型. 若为可去间断点，试补充或修改定义后使其为连续点.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x}{|x|(x^2-1)}, & x\neq\pm1\text{ 及 }0,\\ 0, & x=\pm1.\end{cases}$$

解 因为 $f(x)$在 $x=0$ 处无定义，所以 $x=0$ 是 $f(x)$的间断点.

又因　$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^2+x}{-x(x^2-1)}=1$，　$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2+x}{x(x^2-1)}=-1$.

所以 $x=0$ 为 $f(x)$的第一类间断点(跳跃间断点).

$f(x)$在 $x=\pm1$ 处有定义，但是$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x}{|x|(x^2-1)}=\infty$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$的无穷间断点.

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x(x+1)}{-x(x+1)(x-1)}=\frac{1}{2}$，所以 $x=-1$ 为 $f(x)$的可去间断点.

9. 求下列函数的间断点并判别类型：

(1) $f(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$；　(2) $f(x)=\frac{|x|}{x}$；　(3) $f(x)=[x]$；　(4) $f(x)=\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$.

解 (1) 当 $x=-1$ 为第二类间断点(无穷间断点).

(2) $x=0$，为第一类间断点(跳跃间断点).

(3) $x=0,\pm1,\pm2,\cdots$，均为第一类间断点(跳跃间断点).

(4) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}}=1\quad\left(\lim\limits_{x\to0^+}2^{\frac{1}{x}}=+\infty\right)$，

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{x\to0^-}\frac{-1}{1}=-1\qquad\left(\lim_{x\to0^-}2^{\frac{1}{x}}=0\right),$$

所以 $x=0$ 为第一类(跳跃)间断点.

10. 设 $a>0$,$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+2}, & x\geqslant0,\\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x<0.\end{cases}$

(1) a 为何值时,$x=0$ 是 $f(x)$ 的连续点? (2) a 为何值时,$x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点?

(3) 当 $a=2$ 时求连续区间.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=\dfrac{1}{2}$,$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$,要 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续,则 $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2}$,所以 $a=1$.

(2) 由(1)可知,$a>0$ 且 $a\neq1$ 时 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点.

(3) 当 $a=2$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 间断,但右连续而不左连续,故 $f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty,0)$ 及 $[0,+\infty)$.

11. 设 $f(x)=\begin{cases}2, & x=0,x=\pm2,\\ 4-x^2, & 0<|x|<2,\\ 4, & |x|>2,\end{cases}$ 求出 $f(x)$ 的间断点,并指出是哪一类间断点,若可去,则补充定义,使其在该点连续.

解 (1) 由 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=4$,$f(0)=2$,故 $x=0$ 为可去间断点,改变 $f(x)$ 在 $x=0$ 的定义为 $f(0)=4$,即可使 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

(2) 由 $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=4$,$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=0$,故 $x=2$ 为第一类间断点.

(3) 类似地,易得 $x=-2$ 为第一类间断点.

12. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ e^x+\beta, & x\leqslant0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 当 $\alpha\leqslant0$ 时,$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 不存在,所以 $x=0$ 为第二类间断点;

当 $\alpha>0$ 时,$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}\right)=0$. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(e^x+\beta)=1+\beta$,所以 $\beta=-1$ 时,在 $x=0$ 连续;当 $\beta\neq-1$ 时,$x=0$ 为第一类跳跃间断点.

13. 若 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续 $(a>0)$ 且 $f(0)=f(a)$,证明方程 $f(x)=f\left(x+\dfrac{a}{2}\right)$ 在 $(0,a)$ 内至少有一个实根.

证明 令 $F(x)=f(x)-f\left(x+\dfrac{a}{2}\right)$,在 $\left[0,\dfrac{a}{2}\right]$ 上用零点定理.

14. 验证方程 $x2^x=1$ 至少有一个小于 1 的根.

证明 设 $f(x)=x2^x-1$,易知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $f(0)=-1<0$,$f(1)=1>0$,故 $\exists\,\xi\in(0,1)$,使 $f(\xi)=0$.

15. 证明:若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 必在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

证明 令 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=A$,则对给定的一个 $\varepsilon>0$,$\exists\,X>0$,只要 $|x|>X$,就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,即 $A-\varepsilon(f(x))<A+\varepsilon$. 又由 $f(x)$ 在闭区间 $[-X,X]$ 上连续,根据有界性条件,$\exists\,M>0$,使 $|f(x)|\leqslant M$,$x\in[-X,X]$,取 $N=\max\{M,|A-\varepsilon|,|A+\varepsilon|\}$,则 $|f(x)|\leqslant N$,$x\in(-\infty,+\infty)$.

16. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$,$c_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为任意正数,则在 (a,b) 内至

少存在一个 ξ，使 $f(\xi)=\dfrac{c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\cdots+c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}$.

证明 令 $M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{f(x_i)\}$，$m=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{f(x_i)\}$，则

$$\begin{aligned}&m\leqslant f(x_1)\leqslant M, &&c_1m\leqslant c_1f(x_1)\leqslant c_1M,\\&m\leqslant f(x_2)\leqslant M, &&c_2m\leqslant c_2f(x_1)\leqslant c_2M,\\&\qquad\vdots &&\qquad\vdots\\&m\leqslant f(x_n)\leqslant M, &&c_nm\leqslant c_nf(x_n)\leqslant c_nM,\end{aligned}$$

所以 $m\leqslant\dfrac{c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\cdots+c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}\leqslant M$，由介值定理存在

$$\xi(a<x_1\leqslant\xi\leqslant x_n<b)，使得\ f(\xi)=\frac{c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\cdots+c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}.$$

17. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<g(a)$，$f(b)>g(b)$，试证：在 (a,b) 内至少存在一个 ξ，使 $f(\xi)=g(\xi)$.

证明 假设 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F(a)=f(a)-g(a)<0$，$F(b)=f(b)-g(b)>0$，于是由介值定理在 (a,b) 内至少存在一个 ξ，使 $f(\xi)-g(\xi)=0$，即 $f(\xi)=g(\xi)$.

自测题 1 答案

1. **解** (1) 本题属于 1^∞，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\left(\frac{2x+3}{2x+1}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+2}{2x+1}}=e$.

(2) 当 $x\to0$ 时，$(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}-1\sim\dfrac{1}{2}kx^2$，$\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$，故得 $\dfrac{1}{2}kx^2=-\dfrac{1}{2}x^2$，即 $k=-1$.

(3) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(a+e^{\frac{1}{x}})=a$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin3x}{x}=3$，$f(0)=b+1$.

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，则 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$，即 $a=3=b+1$，故得 $a=3$，$b=2$.

(4) 因 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(3x)}=2$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(x)}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{3t}{f(3t)}=3\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{f(3t)}=6$，故

$$\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2}{\dfrac{2x}{f(2x)}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

(5) 正.

2. **解** (1) $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，意味着 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 存在.

又因为 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$，而 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 存在，所以 $\lim\limits_{x\to1}(e^x-b)=e-b=0\Rightarrow b=e$，于是

$$\lim_{x\to1}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{e^x-e}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{e(e^{x-1}-1)}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{e(x-1)}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{e}{x-a}.$$

若要 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e}{x-a}$ 存在，则 $a\neq1$. 所以，当 $a\neq1$，$b=e$ 时，$x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点. 故选 C.

(2) $f(x)=x\sin x$，故：

当 $x_k=k\pi$ 时，$f(x_k)=0$，即 $k\to\infty$ 时，$f(x_k)=0$；

当 $x_k=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x_k)=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，即 $k\to\infty$ 时，$f(x_k)\to\infty$.

在 $x\to\infty$ 的过程中，$f(x)$ 可以取到 0，故不是无限增大，但有部分值是无限增大，因而 $f(x)=x\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界，但不是无穷大. 故选 A.

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x+1)(\sqrt[3]{x}-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x+1)(\sqrt[3]{x}-1)}=\dfrac{3}{2}$，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小，但不等价. 故选 D.

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{x-\dfrac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-x}{x-\dfrac{\pi}{2}}=-1$, $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{\sin x}=1$,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\tan x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$. 故选 A.

(5) 当 $x=0,x=-1,x=1$ 时函数没有定义,因此 $x=0,x=-1,x=1$ 为 $f(x)$的间断点

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x(x-1)}{-x(x-1)(x+1)}=-1,\quad \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=1.$$

因 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$,故 $x=0$ 为 $f(x)$的跳跃间断点.

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x-1)}{-x(x-1)(x+1)}=\infty$,故 $x=-1$ 为 $f(x)$的无穷间断点.

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{2}$,故 $x=1$ 为 $f(x)$的可去间断点. 故选 C.

3. **解** (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)\xlongequal{\text{分子有理化}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-2x}=\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}(-2x)}=e^{-2}$.

(3) 令 $x=t+1$,则

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x^2-1}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{(1+t)^2-1}(\text{分子进行等价无穷小代换})=\lim_{t\to0}\frac{t}{t^2+2t}=\frac{1}{2}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x(e^x-1)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x x}{\sin x}=1.$

4. **解** $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(a+x^2)=a$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x\sin\dfrac{1}{x}=0$, $f(0)=a$.

因 $f(x)$在 $x=0$ 连续,则 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$,即有 $a=0$.

5. **解** $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+e^{\frac{1}{x}}\right)=0$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}-1\right)=0$, $f(0)=k+1$.

因为 $f(x)$在 $x=0$ 连续,则 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$,即 $0=k+1=0$,故得 $k=-1$.

6. **解** (1) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1+x}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{x^2-x+1}=\dfrac{1}{3}$,故 $x=-1$ 是 $f(x)$的可去间断点.

(2) 函数在 $x=1$ 和 $x=2$ 处都没有定义.

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0$,故 $x=1$ 为跳跃间断点;$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\infty$,故 $x=2$ 为无穷间断点.

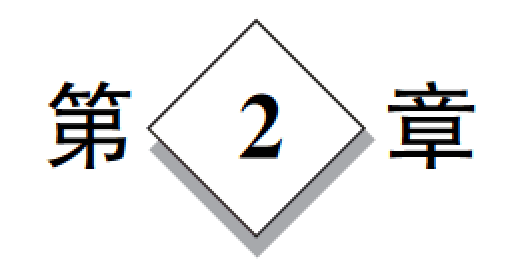
7. **解** 令 $f(x)=x^3+4x^2-3x-1$,则 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续. 又

$$f'(x)=3x^2+8x-3=(3x-1)(x+3).$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=-3,x=\dfrac{1}{3}$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\quad f(-3)=17>0,\quad f(0)=-1<0,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

则 $f(x)=0$ 在$(-\infty,-3),(-3,0),(0,+\infty)$上各有一根,故 $f(x)=0$ 在$(-\infty,0)$内有两个实根.



导数与微分

2.1　大纲要求及重点内容

1. 大纲要求

(1) 理解导数的概念及其几何意义，了解函数的可导性与连续性之间的关系.

(2) 了解导数作为变化率的实际意义，会用导数表达实际应用中一些量的变化率.

(3) 熟练掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，熟练掌握基本初等函数的导数公式.

(4) 理解微分的概念，了解微分概念中所包含的局部线性化思想，了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性，会求函数的微分.

(5) 了解高阶导数的概念，掌握初等函数一阶、二阶导数的求法.

(6) 会求分段函数的导数，特别是利用定义求分段点处的导数.

(7) 会求隐函数和由参数方程确定的函数的一阶、二阶导数，会求反函数的导数.

2. 重点内容

(1) 利用导数的定义求函数的导数；

(2) 根据导数的几何意义求曲线的切线与法线；

(3) 高阶导数；

(4) 复合函数求导；

(5) 由隐函数及参数方程求高阶导数；

(6) 求函数的微分.

2.2　内容精要

1. 基本概念

(1) 导数的极限定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，在点 x_0 自变量的增量是 Δx，相应的函数的增量是 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称

函数 $f(x)$在点 x_0 **可导**(或存在导数),称此极限为函数 $f(x)$在点 x_0 的**导数**(或微商),记为 $f'(x_0)$或$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$,即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\quad 或\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

有时为了方便也将极限改写为下列形式

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\ (\Delta x=h)$$

或

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ (x=x_0+\Delta x),$$

$$f'(x_0)=\lim_{\varphi(x)\to 0}\frac{f(x_0+\varphi(x))-f(x_0)}{\varphi(x)}.$$

注 导数是一个分式的极限,分子是函数在两点的差值,分母是自变量在两点的差值.

(2) 左右导数

$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$称为函数 $f(x)$在 x_0 的**左导数**,

$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$称为函数 $f(x)$在 x_0 的**右导数**.

函数 $f(x)$在 x_0 可导$\Leftrightarrow$函数 $f(x)$在 x_0 的左、右导数都存在并且相等.

(3) 导数的几何意义 $f'(x_0)$是曲线 $y=f(x)$在对应点 $A(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率.

导数的经济意义 函数 $y=f(x)$在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$是当自变量 x 在 x_0 基础上增加一个单位,函数 $y=f(x)$在 $f(x_0)$基础上增加 $f'(x_0)$个单位. 如利润函数 $R=R(x)$,当产量 x 在 x_0 基础上增加一个单位,利润在 $R(x_0)$基础上增加 $R'(x_0)$个单位.

(4) 区间上可导 如果 $y=f(x)$在(a,b)内每一点均可导,则称该函数在(a,b)内可导;若 $f(x)$在(a,b)内可导,且在 $x=a$ 处右导数存在,在 $x=b$ 处左导数存在,则称函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上可导.

(5) 可微 若函数 $y=f(x)$在 x_0 的改变量 Δy 与自变量 x 的改变量 Δx 有下列关系

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数,则称函数 $f(x)$在 x_0 **可微**,$A\Delta x$ 称为函数 $f(x)$在 x_0 的**微分**,表为 $\mathrm{d}y=A\Delta x$ 或 $\mathrm{d}f(x_0)=A\Delta x$.

注 由微分的定义,我们可以把导数看成微分的商. 例如求 $\sin x$ 对$\sqrt{x}$的导数时就可以看成 $\sin x$ 微分与$\sqrt{x}$微分的商,即$\dfrac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}\sqrt{x}}=\dfrac{\cos x\mathrm{d}x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x}=2\sqrt{x}\cos x$.

当 $f'(x_0)\neq 0$ 时,$\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x$ 是 Δy 的线性主部.

2. 求各类函数的导数

(1) 求复合函数的导数 设 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$,则 $y'=f'(u)\varphi'(x)$.

这里包含抽象函数的导数.

(2) 求隐函数的导数 设函数 $y(x)$由 $F(x,y)=0$ 确定.

把方程的两边直接对 x 求导,注意 y 看成 x 的函数.

(3) 求参数方程$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t)\end{cases}$所确定函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$.

注意求二阶导数$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$.

(4) 互为反函数的导数

(函数与反函数的导数)若 $f'(x)\neq0$,则$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$.

(5) 高阶导数的计算

① 直接法　例如,设 $f(x)=\sin x$,求 $f^{(n)}(x)$方法是求一、二、三等低阶导数,总结出高阶导数.

② 间接法　利用已知函数的 n 阶导数. 设 $f(x)=\sin4x$,求 $f^{(n)}(x)=4^n\sin\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

③ 用莱布尼茨公式　$(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^i u^{(i)}v^{(n-i)}$. 如 $y=x^2\ln x$,设 $u=x^2$,$v=\ln x$.

3. 基本定理和基本公式

(1) 基本定理

定理 1(导函数存在定理)　$f'(x_0)$存在$\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

定理 2(函数可导与连续的关系)　可导点必是连续点,反之未必. 例如,$y=|x|$在 $x=0$ 点连续但不可导.

定理 3(一阶可微与可导的关系)　函数 $f(x)$在 x 处可微$\Leftrightarrow f(x)$在 x 处可导.

(2) 公式

$(c)'=0$,其中 c 是常数;

$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$,其中 α 是实数;

$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}=\frac{1}{x\ln a}$,　$(\ln x)'=\frac{1}{x}$;

$(a^x)'=a^x\ln a$;　$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$;

$(\sin x)'=\cos x$;　$(\cos x)'=-\sin x$;　$(\tan x)'=\sec^2 x$;

$(\cot x)'=-\csc^2 x$;　$(\sec x)'=\tan x\sec x$;　$(\csc x)'=-\cot x\csc x$;

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;　$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$;　$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$;

$(\sqrt{1+x^2})'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;　$(\sqrt{1-x^2})'=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

根据复合函数求导,上面公式中的 x 都可以换成任意可导函数 $\varphi(x)$,即

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=f'(x),\quad 则\quad \frac{\mathrm{d}f[\varphi(x)]}{\mathrm{d}\varphi(x)}=f'[\varphi(x)].$$

如$\frac{\mathrm{d}\varphi^{\alpha}(x)}{\mathrm{d}\varphi(x)}=(\varphi(x)^{\alpha})'_{\varphi(x)}=\alpha\varphi^{\alpha-1}(x)$，其中 α 是实数.

2.3 题型总结与典型例题

题型 2-1 判断函数在某点的可导性

【解题思路】 利用导数的定义 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，导数在一点存在的充分必要条件是左右导数存在且相等.

注意 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在并不能保证 $f'(x_0)$存在，即单侧导数存在并不能保证 $f'(x_0)$存在.

利用导数定义解决以下几个问题：

(1) 求特殊函数的导数.

(2) 求极限问题 常用的公式为 $f'(x_0)=\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\frac{f(x_0+\varphi(x))-f(x_0)}{\varphi(x)}$.

例如，已知 $f'(x_0)$存在，求 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\frac{f(x_0-3\varphi(x))-f(x_0)}{\varphi(x)}$.

(3) 分段函数某点的导数 例如，设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\frac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 求 $f'(0)$.

(4) 求含有绝对值的函数的导数. 如，讨论 $f(x)=|x-1|$ 在 $x=1$ 的可导性.

例 2.1 设函数 $f(x)=\cos x$，求$(\cos x)'$及$(\cos x)'|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

解
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot(-2)\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x,$$
$$(\cos x)'|_{x=\frac{\pi}{4}}=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 2.2 设 $f(x)=(x-a)g(x)$，其中 $g(x)$在 $x=a$ 处连续，求 $f'(a)$.

解 $g(x)$仅在 $x=a$ 处连续，在任意点 x 处未必可导，即 $f'(x)$未必存在，因此利用导数的定义 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{(x-a)g(x)-0}{x-a}=g(a)$.

例 2.3 试按导数定义观察极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$，指出 A 表示什么(假设各极限均存在).

解 $A=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-2)\frac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{-2\Delta x}=(-2)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{-2\Delta x}=-2f'(x_0)$.

例 2.4 设函数 $f(x)=(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，求 $f'(0)$.

【分析】 由于 $f(x)$ 是由 n 个因式乘积形式给出的，直接用乘积的求导法则计算比较困难. 但是用导数的定义计算反而简单.

解
$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)-0}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)}{x}=\lim_{x\to0}(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)$$
$$=\lim_{x\to0}(1-2)\cdots(1-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

例 2.5 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}$.

解
$$\lim_{x\to0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x^2f(x)-x^2f(0)}{x^3}-2\lim_{x\to0}\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3-0}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\lim_{x\to0}\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3-0}$$
$$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0).$$

例 2.6 设 $f(x)$ 对任意的实数 x_1,x_2 有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，且 $f'(0)=1$，试证 $f'(x)=f(x)$.

证明 $\forall x$，$f(x+0)=f(x)f(0)$，可得 $f(0)=1$，从而
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f(x)\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}$$
$$=f(x)\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f(x)f'(0)=f(x).$$

例 2.7 设 $f(x)=\begin{cases}\sin(x-1)+2, & x<1,\\ ax+b, & x\geqslant1,\end{cases}$ 问 a,b 取何值时 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导.

【分析】 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，则分段函数在分段点是连续的和可导的，利用这两点就可以求出 a,b 的值.

解 容易知道 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(ax+b)=a+b$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(\sin(x-1)+2)=2$，$f(1)=a+b$，要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，必须 $a+b=2$.

因为 $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(ax+b)-(a+b)}{x-1}=a$,
$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sin(x-1)+2-(a+b)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sin(x-1)}{x-1}=1,$$
要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，则 $a=1$，故 $a=1,b=1$.

【方法小结】 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导隐含了函数在分段点是连续的和可导的，求待定常数时我们往往要用这两个条件.

例 2.8 设 $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

【分析】 分段函数的导数分两部分来求：

(1) 在非分段点处，用导数公式来求；

(2) 在分段点处，首先判断函数在分段点处是否连续. 若不连续，则一定不可导；若连续且在分段点左右两侧函数表达式不同，则要分别用定义求左右导数；反之，即分段点左右两侧函数表达式一样，则直接用导数定义(一个式子)来求导数.

解　当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=x^3\sin\dfrac{1}{x}$ 为一初等函数，这时

$$f'(x)=3x^2\sin\frac{1}{x}+x^3\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)=3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x};$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^3\sin\dfrac{1}{x}=0\neq f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，由此可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

例 2.9　设 $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c, & x\leqslant 0,\\ \ln(1+x), & x>0,\end{cases}$ 试问 a,b,c 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处一阶导数连续，但二阶导数不存在.

【分析】　可导首先要求连续. $f'(0)$ 存在的充分必要条件是 $f'_-(0)$，$f'_+(0)$ 存在并且相等.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax^2+bx+c)=c$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(1+x)=0$，$f(0)=c$. 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处必先连续即 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$，故得 $c=0$.

(2) $$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^2+bx+0-0}{x-0}=b,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-0}{x-0}=1.$$

若 $f'(0)$ 存在，则 $f'_-(0)=f'_+(0)$，故得 $b=1$.

(3) $$f'(x)=\begin{cases}2ax+1, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0.\end{cases}$$

无论 a 为何值，均有 $\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=f'(0)$，故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$f''_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f'_-(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2ax+1-1}{x-0}=2a,$$

$$f''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'_+(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{1+x}-1}{x-0}=1.$$

若使 $f''(0)$ 不存在，则 $f''_-(0)\neq f''_+(0)$，即 $2a\neq 1$，$a\neq\dfrac{1}{2}$.

结论：当 $a\neq\dfrac{1}{2}$，$b=1$，$c=0$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处一阶导数连续，但二阶导数不存在.

例 2.10　设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=1$，求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ 的值.

解　因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，所以 $f(x)$，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $x=0$ 附近 $f'(x)$ 存在.

(1) 因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=1$，$\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)=0$，所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=1$，而$\lim\limits_{x\to0}x=0$，所以$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=f''(0)=1$.

题型 2-2 导数的应用

【解题思路】 利用导数的几何意义：函数 $y=f(x)$在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$是曲线 $y=f(x)$在对应点 $A(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率，即 $k_{切}=f'(x_0)$，$k_{法}=-\frac{1}{f'(x_0)}$，再根据直线的点斜式方程，可以求出曲线 $y=f(x)$在对应点 $A(x_0,f(x_0))$处的切线方程和法线方程.

例 2.11 曲线 $y=\cos x$ 在$\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$处的切线方程及法线方程.

解 切线斜率$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\sin x\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故在$\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$处，切线方程为$y-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$；法线斜率为$-\left(1\Big/-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故法线方程为

$$y-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right).$$

注 切线方程切不可写成 $y-\frac{1}{2}=-\sin x\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，一定要求出曲线在$\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$处的斜率.

例 2.12 曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq0)$相切，求 a.（2010 年考研数学二）

解 相切指相交且有公共切线，两条曲线有交点，且在交点处有公切线.

由$\begin{cases}x^2=a\ln x,\\2x=\frac{a}{x},\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=e^{\frac{1}{2}},\\a=2e.\end{cases}$

例 2.13 设$f(x)$在 $x=0$ 处连续，且$\lim\limits_{x\to0}\frac{[f(x)+1]x^2}{x-\sin x}=2$，求曲线 $y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程.

解 $\lim\limits_{x\to0}(f(x)+1)=\lim\limits_{x\to0}\frac{[f(x)+1]x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{[f(x)+1]x^2}{x-\sin x}\cdot\frac{x-\sin x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{[f(x)+1]x^2}{x-\sin x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}=2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^2}=0.$$

由于 $f(x)$在 $x=0$ 处连续，故 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1$. 于是

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{[f(x)+1]x^2}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{[f(x)+1]x^2}{x-\sin x}\cdot\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{[f(x)+1]x^2}{x-\sin x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}=\frac{1}{3},$$

故所求的切线方程为 $y-f(0)=\frac{1}{3}x$,即 $y=\frac{1}{3}x-1$.

例 2.14 设 $f(x)=\begin{cases}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. (1)求 a 的值;(2)求曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,a)$ 处的切线方程.

解 因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=a$,即

$$a=f(0)=\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin 2x}=e^2.$$

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}-e^2}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+\sin 2x)}-e^2}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+\sin 2x)-2}-1}{x}\\&=e^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 2x)-2x}{x^2}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\cos 2x}{1+\sin 2x}-2}{2x}\\&=e^2\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1-\sin 2x}{x(1+\sin 2x)}=e^2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x}-2\right)\\&=-2e^2.\end{aligned}$$

所求切线方程为 $y-e^2=-2e^2(x-0)$,即 $y=e^2(1-2x)$.

例 2.15 在曲线 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$ 上求对应于 $t=1$ 处的法线方程.

解 当 $t=1$ 时,$x=\frac{\pi}{4}$,$y=\frac{1}{2}\ln 2$,而 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=1}=\left.\frac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}\right|_{t=1}=1$,所以法线方程为 $y-\frac{1}{2}\ln 2=-1\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$,即 $y+x-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}=0$.

例 2.16 设曲线 $y=f(x)$ 和 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线,求 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\frac{n}{n+2}\right)$.

【分析】 有公共切线,则有交点且在交点处有相同的切线. (1)切点为 $(1,0)$,故 $f(1)=0$;(2)有公共切线,故 $f'(1)=(2x-1)|_{x=1}=1$.

解 由条件可知 $f(1)=0$,$f'(1)=1$,所以

$$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(1+\frac{-2}{n+2}\right)-f(1)}{\frac{-2}{n+2}\cdot\frac{n+2}{-2n}}=-2f'(1)=-2.$$

题型 2-3 求分段函数的导数(分段函数在分段点的导数必须用定义)

【解题思路】 对于分段函数的求导问题,在分段点处的导数必须用定义求,在分段点外一个区间上的导数用运算法则求.

例 2.17 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \frac{1}{x}\sin^2 x, & x<0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解 在分段点 $x=0$ 处的导数必须用定义求.

当 $x>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$；当 $x<0$ 时，$f'(x)=\dfrac{x\sin 2x-\sin^2 x}{x^2}$.

由于 $x=0$ 是该函数的分段点，由导数的定义，有

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)-0}{x-0}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x^2}=1,$$

因此 $f'(0)=1$，于是

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{x\sin 2x-\sin^2 x}{x^2}, & x<0,\end{cases}\quad \text{即}\quad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{x\sin 2x-\sin^2 x}{x^2}, & x<0.\end{cases}$$

例 2.18 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos 2x}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解 当 $x=0$ 时，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1-\cos 2x}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2.$$

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\left(\dfrac{1-\cos 2x}{x}\right)'=\dfrac{2x\sin 2x-(1-\cos 2x)}{x^2}$. 故

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x\sin 2x-1+\cos 2x}{x^2}, & x\neq 0,\\ 2, & x=0.\end{cases}$$

例 2.19 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 求 $f'_-(0)$，$f'_+(0)$.

解 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-0}{x-0}=-1$,

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}x=0.$$

由于 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以 $f'(0)$ 不存在.

题型 2-4 可导性与连续性的讨论

【解题思路】 利用连续的定义 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，判断 $f(x)$ 在 x_0 点判断是否连续；利用导数的定义 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 或 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 来判断 $f(x)$ 在 x_0 点是否可导.

例 2.20 讨论函数 $f(x)=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-\sin x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x=0$，$f(0)=|\sin 0|=0$，所以

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$，于是 $f(x)=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处连续.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\sin x-0}{x-0}=-1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-0}{x-0}=1.$$

由于 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以 $f(x)=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

例 2.21　讨论 $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解　因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x^3\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，所以函数在 $x=0$ 处连续.

又由 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$，所以函数在 $x=0$ 处可导.

题型 2-5　用四则运算求导法则、复合函数及反函数求导法则求导数

【解题思路】　利用四则运算求导法则、复合函数及反函数求导法则.

设函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 在点 x 处具有导数，则：

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$；

(2) $[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$，$[cu(x)]'=cu'(x)$，
$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$；

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$；

(4) 复合函数求导法则，设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，则 $y'=f'(u)\varphi'(x)$；

(5) 设 $y=f(x)$ 的反函数为 $x=\varphi(y)$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

例 2.22　求下列函数的导数：

(1) $y=e^{\frac{1}{\sin x}}$；　(2) $y=\sqrt[3]{1-2x^2}$；

(3) $y=\ln\tan x$；　(4) $y=\ln\cos(e^x)$；

(5) $y=\sec^3(\ln(x^2+1))$；　(6) $y=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$.

解　(1) $y'=\dfrac{\mathrm{d}e^{\frac{1}{\sin x}}}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}e^{\frac{1}{\sin x}}}{\mathrm{d}\frac{1}{\sin x}}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\frac{1}{\sin x}}{\mathrm{d}\sin x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x}=e^{\frac{1}{\sin x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sin^2x}\right)\cdot\cos x$；

(2) $y'=(\sqrt[3]{1-2x^2})'=\dfrac{1}{3}(1-2x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-2x^2)'=\dfrac{-4x}{3\sqrt[3]{(1-2x^2)^2}}$.

(3) $y'=(\ln\tan x)'=\dfrac{1}{\tan x}\cdot(\tan x)'=-\dfrac{\sec^2x}{\tan x}=\dfrac{2}{\sin2x}$.

(4) 所给函数可分解为 $y=\ln u$，$u=\cos v$，$v=e^x$. 因为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\dfrac{1}{u}$，$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=-\sin v$，$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=e^x$，故

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{u}\cdot(-\sin v)\cdot e^x=-\dfrac{\sin(e^x)}{\cos(e^x)}\cdot e^x=-e^x\tan(e^x)$.

不写出中间变量，此例可写成：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=[\ln\cos(\mathrm{e}^x)]'=\frac{1}{\cos(\mathrm{e}^x)}[\cos(\mathrm{e}^x)]'=\frac{-\sin(\mathrm{e}^x)}{\cos(\mathrm{e}^x)}(\mathrm{e}^x)'=-\mathrm{e}^x\tan(\mathrm{e}^x).$$

（5）设 $y=u^3, u=\sec v, v=\ln w, w=z+1, z=x^2$，根据复合函数求导法则，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}w}\cdot\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=3u^2\cdot\sec v\cdot\tan v\cdot\frac{1}{w}\cdot 1\cdot 2x$$

$$=3\sec^2(\ln x(x^2+1))\sec(\ln(x^2+1))\tan(\ln(x^2+1))\frac{1}{x^2+1}2x$$

$$=6\frac{x}{x^2+1}\sec^3(\ln(x^2+1))\tan(\ln(x^2+1)).$$

（6）$y'=\left[x\arctan x-\frac{1}{x}\ln(1+x^2)\right]'=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{x}\frac{2x}{1+x^2}$

$$=\arctan x+\frac{x-2}{1+x^2}+\frac{1}{x^2}\ln(1+x^2).$$

例 2.23 设函数 f,φ 可导，$y=f(\arctan x+\varphi(\tan x))$，求 y'.

解 $y'=f'(\arctan x+\varphi(\tan x))\cdot(\arctan x+\varphi(\tan x))'$

$$=f'(\arctan x+\varphi(\tan x))\cdot\left(\frac{1}{1+x^2}+\varphi'(\tan x)(\tan x)'\right)$$

$$=f'(\arctan x+\varphi(\tan x))\cdot\left(\frac{1}{1+x^2}+\varphi'(\tan x)\sec^2 x\right).$$

注 $\frac{\mathrm{d}f[\varphi(x)]}{\mathrm{d}x}=f'[\varphi(x)]\varphi'(x).$

例 2.24 设 $y=f(x)$ 二阶可导，$f'(x)\neq 0, f(0)=1, f'(0)=\sqrt{15}, f''(0)=-2$，$y=f(x)$ 的反函数为 $x=\varphi(y)$，求 $\frac{|\varphi''(1)|}{[1+\varphi'^2(1)]^{\frac{3}{2}}}$.

解 由 $f(0)=1$，得 $\varphi(1)=0$. 由反函数导数公式 $\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$，得 $\varphi'(1)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{\sqrt{15}}$. 再由复合函数求导法则得

$$\varphi''(y)=\left[\frac{1}{f'(x)}\right]'_y=\left[\frac{1}{f'(x)}\right]'_{f'(x)}\cdot[f'(x)]'_x\cdot x'_y\quad\left(x'_y=\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}\right)$$

$$=-\frac{1}{f'^2(x)}\cdot f''(x)\cdot\frac{1}{f'(x)}=-\frac{f''(x)}{f'^3(x)},$$

$$\varphi''(1)=-\frac{f''(0)}{f'^3(0)}=\frac{2}{15\sqrt{15}},$$

$$\frac{|\varphi''(1)|}{[1+\varphi'^2(1)]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{2}{15\sqrt{15}}}{\left(1+\frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{32}.$$

题型 2-6 隐函数的导数

【解题思路】 求隐函数的导数关键是明确对哪个变量求导，这样，另一个变量就是方程所确定的隐函数. 隐函数求导方法小结：(1)方程两端同时对 x 求导数，注意把 y 当作复合

函数求导的中间变量来看待，例如$(\ln y)'_x=\frac{1}{y}y'$.(2)从求导后的方程中解出y'来.(3)隐函数求导允许其结果中含有y.但求一点的导数时不但要把x值代进去，还要把对应的y值代进去.

例 2.25　设方程$xy+e^y=e$确定了y是x的函数，求$y'(0)$.

解
$$xy+e^y=e, \tag{1}$$

第一步，将$x=0$代入方程(1)，得$y=1$.

第二步，将方程(1)两边关于x求导，得
$$y+xy'+e^y y'=0, \tag{2}$$

第三步，由(2)解得$y'=-\frac{y}{x+e^y}$.当$x=0$时$y=1$，所以$y'(0)=-\frac{1}{e}$.或将$x=0$时$y=1$代入(2)中，解得$y'(0)=-\frac{1}{e}$.

例 2.26　设函数$x=x(t)$由方程$t\cos x+x=0$确定，又函数$y=y(x)$由方程$e^{y-2}-xy=1$确定，求复合函数$y=y(x(t))$的导数$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}$.

【分析】　这是一道复合函数，隐函数求导的题.$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$，而$\frac{dy}{dx}$和$\frac{dx}{dt}$需要利用隐函数求导法来求.

解　先给方程标号
$$t\cos x+x=0, \tag{1}$$
$$e^{y-2}-xy=1. \tag{2}$$

将$t=0$代入方程(1)得$x=0$，再将$x=0$代入方程(2)得$y=2$.

在方程(1)两端关于t求导，得
$$\cos x-t\sin x\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{dx}{dt}=0, \tag{3}$$

故$\frac{dx}{dt}=\frac{\cos x}{t\sin x-1}$.于是$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\substack{t=0\\x=0}}=\left.\frac{\cos x}{t\sin x-1}\right|_{\substack{t=0\\x=0}}=-1$.

在方程(2)两端关于x求导，得
$$e^{y-2}\frac{dy}{dx}-y-x\frac{dy}{dx}=0, \tag{4}$$

故$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{e^{y-2}-x}$.

将$x=0,y=2$代入上式，得$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=\left.\frac{y}{e^{y-2}-x}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=2$，因此
$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}\cdot\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=-1\times2=-2.$$

注　可直接将$t=0,x=0$代入(3)式得$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\substack{t=0\\x=0}}=-1$，将$x=0,y=2$代入(4)式得$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=2$.

例 2.27 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2-y+1=e^y$ 确定，求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.（2012 年数学二）

【分析】 这是一个隐函数，可以利用隐函数求导法则求解.

解
$$x^2-y+1=e^y. \tag{1}$$
把 $x=0$ 代入(1)式得 $y=0$.

对(1)式两边关于 x 求导得
$$2x-\frac{dy}{dx}=e^y\frac{dy}{dx}. \tag{2}$$
把 $x=0,y=0$ 代入(2)式得 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=0$.

对方程(2)两边关于 x 求导得
$$2-\frac{d^2y}{dx^2}=e^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+e^y\frac{d^2y}{dx^2}. \tag{3}$$
再将 $x=0,y=0,\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$ 代入(3)式可得 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\substack{x=0\\y=0\\\frac{dy}{dx}=0}}=1$.

题型 2-7 取对数求导法

【解题思路】 对形如 $y=u(x)^{v(x)}$ 的函数的幂指函数或多个因式的积、商、乘方、开方组成的函数，对于这类函数，可以先在函数两边取对数，然后在等式两边同时对自变量 x 求导，最后解出所求导数. 我们把这种方法称为**取对数求导法**.

例 2.28 设 $y=x^{\sin x}(x>0)$，求 y'.

解 这函数是幂指函数，为了求此函数的导数，可以先在两边取对数，得 $\ln y=\sin x\cdot\ln x$. 此式两边对 x 求导，有 $\frac{1}{y}y'=\cos x\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}$，于是
$$y'=y\left(\cos x\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}\right)=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}\right).$$

例 2.29 设 $y=\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}}{\sqrt{(x-3)^3(x-4)^5}}$，求 y'.

解 先在两边取对数，得
$$\ln y=\frac{1}{3}[2\ln|x-1|+\ln|x-2|]-\frac{1}{2}[3\ln|x-3|+5\ln|x-4|].$$
上式两边对 x 求导，有 $\frac{1}{y}y'=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{3}{x-3}+\frac{5}{x-4}\right]$，于是
$$y'=\frac{y}{3}\left[\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right]-\frac{y}{2}\left[\frac{3}{x-3}+\frac{5}{x-4}\right].$$

例 2.30 求函数 $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ 的导数.

【错解】 $y'=x\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x-1}\frac{1+x-x}{(1+x)^2}=x\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x-1}\frac{1}{(1+x)^2}$.

【分析】 这函数不是指数函数型的一般复合函数，不能按照复合函数的求导法则计算导数，应该两边取对数后再求导.

解 两边取对数得 $\ln y=x\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|=x[\ln|x|-\ln|1+x|]$. 两边求导得

$$\frac{y'}{y}=[\ln x-\ln(1+x)]+x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right),$$

故有 $y'=y\left(\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right)=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\left(\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right)$.

题型 2-8 由参数方程所确定的函数的导数

【解题思路】 设 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$ $x=\varphi(t)$具有单调连续的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，则变量 y 与 x 构成复合函数关系 $y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$，且 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$. $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$. 利用参数方程的求导公式求导.

例 2.31 设函数由参数方程 $\begin{cases}x=2t+t^2,\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(t>-1)$所确定，其中 $\psi(t)$具有 2 阶导数，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.（2010 年考研数学二）

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{2t+2}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d\left(\frac{\psi'(t)}{2t+2}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{\psi''(t)(2t+2)-2\psi'(t)}{(2t+2)^2}}{2t+2}=\frac{\psi''(t)(t+1)-\psi'(t)}{4(1+t)^3}$$

例 2.32 求椭圆方程 $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t\end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$时的切线方程.

解 当 $t=\frac{\pi}{4}$时，椭圆上的相应点 M_0 的坐标为

$$x_0=a\cos\frac{\pi}{4}=\frac{a\sqrt{2}}{2},\qquad y_0=b\sin\frac{\pi}{4}=\frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

曲线在点 M_0 的切线的斜率为 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{b\cos t}{-a\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{b}{a}$，代入点斜式方程即得椭圆在点 M_0 处的切线方程为 $y-\frac{b\sqrt{2}}{2}=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$.

例 2.33 设 $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=t\sin t+\cos t,\end{cases}$ t 为参数，则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

解 $dx=\cos t\,dt$, $\quad dy=t\cos t\,dt$, $\quad \frac{dy}{dx}=t$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(t)'}{(\sin t)'}=\frac{1}{\cos t}=\sec t,\quad 所以\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}.$$

例 2.34 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=3t+t^3,\end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3+3t^2}{\frac{1}{1+t^2}}=3(1+t^2)^2$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}[3(1+t^2)^2]=\frac{\frac{d[3(1+t^2)^2]}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{12t(1+t^2)}{\frac{1}{1+t^2}}=12t(1+t^2)^2,\text{ 故}\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=48.$$

题型 2-9 求函数在一点的微分

【解题思路】 利用 $df(x)|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)dx$ 求函数在一点的微分.

例 2.35 求函数 $y=x^3$ 当 $x=2,\Delta x=0.02$ 时的微分.

解 先求函数在任一点的微分 $dy=f'(x)\Delta x=(x^3)'\Delta x=3x^2\Delta x$,再求函数当 $x=2$,$\Delta x=0.02$ 时的微分 $dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}}=3x^2\Delta x\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}}=3\times2^2\times0.02=0.24$.

例 2.36 求函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 和 $x=3$ 处的微分.

解 函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的微分为 $dy|_{x=1}=(x^2)'|_{x=1}\Delta x=2\Delta x$;在 $x=3$ 处的微分为

$$dy|_{x=3}=(x^2)'|_{x=3}\Delta x=6\Delta x.$$

例 2.37 设函数 $f(u)$ 可导,$y=f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时,相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1,则 $f'(1)=$________.(2002 年高数二)

A. -1　　B. 0.1　　C. 1　　D. 0.5

【分析】 相应的函数增量 Δy 的线性主部就是微分 dy,因此利用微分可以解决.

解 因为 $\dfrac{dy}{dx}=2xf'(x^2)$,则 $dy\Big|_{\substack{x=-1\\ \Delta x=-0.1}}=2xf'(x^2)\cdot\Delta x\Big|_{\substack{x=-1\\ \Delta x=-0.1}}$,即

$$0.1=2(-1)f'(1)\cdot(-0.1),\quad\text{故}\quad f'(1)=0.5.$$

例 2.38 在等式 d(　)$=x\,dx$ 的括号中填入适当的函数,使等式成立.

解 我们知道,$d(x^2)=2x\,dx$. 可见,$x\,dx=\dfrac{1}{2}d(x^2)=d\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$,即 $d\left(\dfrac{x^2}{2}\right)=x\,dx$.

更进一步 $d\left(\dfrac{x^2}{2}+c\right)=x\,dx$.

题型 2-10 利用 $df(x)=f'(x)dx$ 求函数的微分

【解题思路】 利用 $df(x)=f'(x)dx$ 求函数的微分.

例 2.39 设 $y=x\sin2x$,求 dy.

解 $dy=d(x\sin2x)=\sin2x\,dx+x\,d(\sin2x)=\sin2x\,dx+2x\cos2x\,dx$
$=(\sin2x+2x\cos2x)dx$.

例 2.40 求函数 $y=e^{1-3x}\cos x$ 的微分.

解 $dy=d(e^{1-3x}\cos x)=\cos x\,d(e^{1-3x})+e^{1-3x}d(\cos x)$
$=(\cos x)e^{1-3x}(-3dx)+e^{1-3x}(-\sin x)dx=-e^{1-3x}(3\cos x+\sin x)dx$.

题型 2-11 利用微分形式不变性求函数的微分

【解题思路】 无论 u 是自变量还是复合函数的中间变量,函数 $y=f(u)$ 的微分形式总

是可以按微分定义的形式来写，即有 $dy=f'(u)du$，这一性质称为**微分形式的不变性**. 利用微分形式不变性求函数的微分.

例 2.41 求函数 $y=\sin(2x+1)$的微分.

解 把 $2x+1$ 看成中间变量，则

$$dy=d(\sin u)=\cos u du=\cos(2x+1)d(2x+1)=\cos(2x+1)\cdot 2dx=2\cos(2x+1)dx.$$

例 2.42 设 $y=\ln^2(1-x)$，求 dy.

解 $dy=2\ln(1-x)d\ln(1-x)=2\ln(1-x)\cdot\dfrac{-1}{1-x}dx=\dfrac{2}{x-1}\ln(1-x)dx.$

题型 2-12 利用微分进行近似计算

【解题思路】 利用 $\Delta y\approx dy=f'(x_0)\Delta x$，或 $f'(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ 进行近似计算.

例 2.43 有一批半径为 1cm 的球，为了提高球面的光洁度，要镀上一层铜，厚度定为 0.01cm，估计一下每只球需用铜多少克？（铜的密度为 $8.9g/cm^3$）

解 先求出镀层的体积，再乘上密度就得到每只球需用铜的质量.

因为镀层的体积等于两个球体体积之差，所以它就是球体体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$ 当 R 自 R_0 取得增量 ΔR 时得增量 ΔV. 求 V 对 R 的导数得

$$V'|_{R=R_0}=\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)'\Big|_{R=R_0}=4\pi R,\quad 于是\quad \Delta V\approx 4\pi R_0^2\Delta R.$$

将 $R=1,\Delta R=0.01$ 代入上式，得 $\Delta V\approx 4\times 3.14\times 1^2\times 0.01\approx 0.13(cm^3)$，于是镀每只球需用的铜约为 $0.13\times 8.9\approx 1.16(g)$.

例 2.44 计算 $\sin 30°30'$的近似值.

解 把$30°30'$化为弧度，得$30°30'=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{360}$.

由于所求的是正弦函数的值，故设 $f(x)=\sin x$. 此时 $f'(x)=\cos x$. 如果取 $x_0=\dfrac{\pi}{6}$，则 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$与 $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$都容易计算，并且 $\Delta x=\dfrac{\pi}{360}$比较小，所以有

$$\begin{aligned}\sin 30°30'&=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}\right)\approx\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{360}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360}\\&\approx 0.5000+0.0076=0.5076.\end{aligned}$$

题型 2-13 求高阶导数

【解题思路】 求高阶导数的方法主要有 4 种：

（1）由直接求低阶导数总结规律，推断高阶导数.

（2）利用下面的公式间接求高阶导数. 要记住几个常见的高阶导数.

① $(e^x)^{(n)}=e^x$； ② $(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n$；

③ $[\sin(ax+b)]^{(n)}=a^n\sin\left(ax+b+\dfrac{n\pi}{2}\right)$； ④ $[\cos(ax+b)]^{(n)}=a^n\cos\left(ax+b+\dfrac{n\pi}{2}\right)$；

⑤ $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$； ⑥ $(\ln x)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$；

⑦ $\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!\ a^n}{(ax+b)^{n+1}}$.

(3) 利用莱布尼茨公式求乘积的高阶导数.

(4) 泰勒公式(第 3 章).

例 2.45 求 $y=\ln(1+x)$的 n 阶导数.

【分析】 可直接求,然后归纳总结.

解 $y=\ln(1+x)$, $y'=\dfrac{1}{1+x}$, $y''=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$,

$$y'''=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},\quad y^{(4)}=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}.$$

一般地, $y^{(n)}=[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

由数学归纳法知 $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$, $n=1,2,\cdots$.

例 2.46 设 $y=f(x^2)$,若 $f''(x)$存在,求$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x^2)\cdot 2x$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=f''(x^2)4x^2+2f'(x^2)$.

例 2.47 设 $f'(x)=\mathrm{e}^{2f(x)}$,若 $f'(0)=1$ 存在,求 $f^{(n)}(0)$.

解 因为 $f'(0)=1$,所以 $f(0)=0$.

$f''(x)=\mathrm{e}^{2f(x)}\cdot 2f'(x)=2\mathrm{e}^{2f(x)}\cdot \mathrm{e}^{2f(x)}=2\mathrm{e}^{4f(x)}$,

$f'''(x)=2\mathrm{e}^{4f(x)}\cdot 4f'(x)=2\cdot 4\mathrm{e}^{4f(x)}\cdot \mathrm{e}^{2f(x)}=2\cdot 4\mathrm{e}^{6f(x)}$,

$f^{(4)}(x)=2\cdot 4\mathrm{e}^{6f(x)}\cdot 6f'(x)=2\cdot 4\cdot 6\mathrm{e}^{6f(x)}\cdot \mathrm{e}^{2f(x)}=2\cdot 4\cdot 6\mathrm{e}^{8f(x)}$,

$\vdots$

$f^{(n)}(x)=2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot 2(n-1)\cdot \mathrm{e}^{2nf(x)}$.

$f^{(n)}(0)=2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot 2(n-1)\cdot \mathrm{e}^{2nf(0)}=2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot 2(n-1)=2^{n-1}(n-1)!$.

例 2.48 $y=x^2\mathrm{e}^{2x}$,求 $y^{(20)}$.

解 设 $u=\mathrm{e}^{2x}$, $v=x^2$,则 $u^{(k)}=2^k\mathrm{e}^{2x}$ $(k=1,2,\cdots,20)$, $v'=2x$, $v''=2$, $v^{(k)}=0$ $(k=3,4,\cdots,20)$,代入莱布尼茨公式,得

$$\begin{aligned}y^{(20)}=(x^2\mathrm{e}^{2x})^{(20)}&=2^{20}\mathrm{e}^{2x}\cdot x^2+20\cdot 2^{19}\mathrm{e}^{2x}\cdot 2x+\frac{20\cdot 19}{2!}2^{18}\mathrm{e}^{2x}\cdot 2\\&=2^{20}\mathrm{e}^{2x}(x^2+20x+95).\end{aligned}$$

例 2.49 函数 $f(x)=x^2\cdot 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$.

解 $f^{(n)}(x)=\mathrm{C}_n^0x^2\,(2^x)^{(n)}+\mathrm{C}_n^1(x^2)'(2^x)^{(n-1)}+\mathrm{C}_n^2(x^2)''(2^x)^{(n-2)}$,故

$$f^{(n)}(0)=\mathrm{C}_n^2 2\,(2^x)^{(n-2)}\big|_{x=0}=\frac{n(n-1)}{2}2\,(\ln 2)^{n-2}=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}.$$

例 2.50 设 $f(x)$在(a,b)内二次可导,且存在常数 α,β,使得对于 $\forall x\in(a,b)$,有 $f'(x)=\alpha f(x)+\beta f''(x)$,则 $f(x)$在(a,b)内无穷次可导.

证明 若 $\beta=0$,对于 $\forall x\in(a,b)$,有

$$f'(x)=\alpha f(x),f''(x)=\alpha f'(x)=\alpha^2 f(x),\cdots,f^{(n)}(x)=\alpha^n f(x),$$

从而 $f(x)$在(a,b)内无穷次可导.

若 $\beta\neq 0$，对于 $\forall x\in(a,b)$，有

$$f''(x)=\frac{f'(x)-\alpha f(x)}{\beta}=A_1f'(x)+B_1f(x),$$

其中 $A_1=\dfrac{1}{\beta}$，$B_1=\dfrac{\alpha}{\beta}$. 而

$$f'''(x)=A_1f''(x)+B_1f'(x).$$

设 $f^{(n)}(x)=A_1f^{(n-1)}(x)+B_1f^{(n-2)}(x)$，则 $f^{(n+1)}(x)=A_1f^{(n)}(x)+B_1f^{(n-1)}(x)$，即 $f(x)$在(a,b)内任意阶可导.

2.4　课后习题解答

习题 2.1

1. 根据导数的定义求下列函数的导数：

(1) $y=ax+b$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；

(2) $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$，求 $f'(1)$，$f'(2)$，$f'(3)$；

(3) $f(x)=(x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$，求 $f'(1)$；

(4) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 求 $f'(0)$；

(5) $f(x)=x\,|x|$，求 $f'(0)$.

解　(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a(x+\Delta x)+b-ax-b}{\Delta x}=a$；

(2) $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-2)^2(x-3)^3=-8$，

$f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=0$；　　$f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=0$；

(3) $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-0}{x-1}=\dfrac{\pi}{4}$；

(4) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$；

(5) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -x^2, & x<0,\end{cases}$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-0}{x-0}=0$，　　$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x^2-0}{x-0}=0$，

$f'_+(0)=f'_-(0)$，故 $f'(0)=0$.

2. 下列各题中均假定 $f'(x_0)$存在，按照导数定义观察下列极限，指出 A 表示什么：

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，其中 $f(0)=0$，且 $f'(0)$存在；

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]=A$.

解　(1) 因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\lim\limits_{-\Delta x\to 0}\dfrac{f[x_0+(-\Delta x)]-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0)$，所以 $A=$

$-f'(x_0)$.

(2) 因为 $f(0)=0$，于是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=A$.

(3) 因为
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]-[f(x_0-h)-f(x_0)]}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{-h\to 0}\frac{f[x_0+(-h)]-f(x_0)}{-h}$$
$$=f'(x_0)+f'(x_0)=2f'(x_0),$$
所以 $A=2f'(x_0)$.

(4) $A=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)}{\frac{1}{n}}=f'(x_0)$.

3. 如果 $f(x)$ 为偶函数，且 $f'(0)$ 存在，证明 $f'(0)=0$.

证明 因为 $f'(0)$ 存在，所以 $f'(0)=f'_+(0)=f'_-(0)$，而
$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\xlongequal{x=-t}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(-t)-f(0)}{-t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{-t}=-f'_+(0)=-f'(0),$$
所以 $f'(0)=-f'(0)$，故 $f'(0)=0$.

4. 若 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant c,\\ ax+b, & x>c,\end{cases}$ 其中 c 为常数，试确定 a 和 b，使得 $f'(c)$ 存在.

解 要 $f'(c)$ 存在，必须 $f(x)$ 在点 $x=c$ 处连续，即 $\lim\limits_{x\to c^-}f(x)=\lim\limits_{x\to c^+}f(x)=f(c)$，亦即
$$\lim_{x\to c^-}x^2=c^2=\lim_{x\to c^+}(ax+b)=ac+b.$$
又
$$f'_-(c)=\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c^-}\frac{x^2-c^2}{x-c}=2c,\quad f'_+(c)=\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c^+}\frac{ax+b-(ac+b)}{x-c}=a.$$
由 $f'_+(c)=f'_-(c)$ 得 $a=2c$，从而 $b=-c^2$，即当 $a=2c, b=-c^2$ 时 $f'(c)$ 存在.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3$，求 $f'(2)$.

解 由于极限 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3$ 存在，故有 $f(2)=0$，所以 $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3$.

6. 求下列函数 $f(x)$ 的 $f'_-(0)$ 和 $f'_+(0)$，并问 $f'(0)$ 是否存在？

(1) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0;\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 (1)
$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x-0}{x-0}=1,$$
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-0}{x-0}=1,$$
故有 $f'(0)=1$.

(2)
$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x-0}=1,$$
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x-0}=0,$$
故有 $f'(0)$ 不存在.

注　$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

7. 求曲线 $y=\dfrac{x^5+1}{x^4+1}$，$x_0=1$ 在横坐标为 x_0 点的切线方程和法线方程.

解　切点为(1,1)，斜率为 $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{x^5+1}{x^4+1}-1}{x-1}=\dfrac{1}{2}$，故切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$；法线方程为 $y=-2x+3$.

注　本题的 $f'(1)$用定义求比较好.

8. 在抛物线 $y=x^2$ 上取横坐标为 $x_1=1$ 和 $x_2=3$ 的两点，作过这两点的割线，问该抛物线上哪一点的切线可平行于这割线？

解　割线与切线平行，则割线的斜率等于切线的斜率.

割线的斜率 $k_1=\dfrac{3^2-1^2}{3-1}=4$，切线的斜率 $k_2=y'=2x$，由 $k_1=k_2=4$，得 $x=2$，故抛物线上(2,4)的切线可平行于这割线，即抛物线上(2,4)点处的切线平行于割线.

提高题

1. 若 $f(x)$在 $x=a$ 可导，且 $f(a)\neq0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n$.（2016 年全国预赛题）

解　本题属于 1^∞ 型未定式

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}-1\right]}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{f(a)}}=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

2. 若 $f(1)=0$，$f'(1)$存在，求极限 $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin^2x+\cos x)\tan3x}{(e^{x^2}-1)\sin x}$.

解
$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to0}\frac{f(\sin^2x+\cos x)\tan3x}{(e^{x^2}-1)\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{f(\sin^2x+\cos x)\cdot3x}{x^2\cdot x}=3\lim_{x\to0}\frac{f(\sin^2x+\cos x)}{x^2}\\&=3\lim_{x\to0}\frac{f(\sin^2x+\cos x)-f(1)}{\sin^2x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2x+\cos x-1}{x^2}\\&=3\lim_{x\to0}\frac{f(\sin^2x+\cos x)-f(1)}{\sin^2x+\cos x-1}\cdot\frac{x^2-\frac{1}{2}x^2}{x^2}\\&=3f'(1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}f'(1).\end{aligned}$$

3. 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，对任意 x 都有 $f(x+1)=2f(x)$，且当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时，$f(x)=x(1-x^2)$，试判断 $f(x)$在 $x=0$ 处是否可导.

解　当 $-1\leqslant x\leqslant0$ 时，$0\leqslant x+1\leqslant1$，则
$$f(x)=\frac{1}{2}f(x+1)=\frac{1}{2}(x+1)[1-(x+1)^2]=\frac{1}{2}(x+1)(-x^2-2x).$$
故
$$f(x)=\begin{cases}x(1-x^2), & 0\leqslant x\leqslant1,\\ \frac{1}{2}(x+1)(-x^2-2x), & -1\leqslant x<0.\end{cases}$$
$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{2}(x+1)(-x^2-2x)-0}{x}=-1,$$
$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(1-x^2)-0}{x}=1,$$

$f'_-(0)\neq f'_+(0)$，故 $f'(0)$不存在.

4. 已知 α,β 为常数，$f(x)$可导，求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\alpha\Delta x)-f(x-\beta\Delta x)}{\Delta x}$.

解 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\alpha\Delta x)-f(x-\beta\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\alpha\Delta x)-f(x)}{\alpha\Delta x}\alpha+\dfrac{f(x-\beta\Delta x)-f(x)}{-\beta\Delta x}\beta=(\alpha+\beta)f'(x)$.

5. 已知 $f(x)=x(2x-1)(3x-2)\cdot\cdots\cdot(100x-99)$，求 $f'(0)$.

解 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(2x-1)(3x-2)\cdot\cdots\cdot(100x-99)-0}{x-0}$

$=(-1)(-2)\cdot\cdots\cdot(-99)=-99!$.

6. 设函数 $f(x)$在 $x=0$ 处连续，且$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，则(　　).

A. $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$存在　　B. $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$存在

C. $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$存在　　D. $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$存在

解 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$ 只能说明 $f(0)=0$，$f'_+(0)=1$，故选 C.

7. 设函数 $f(x)$连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得(　　).

A. $f(x)$在$(0,\delta)$内单调增加　　B. $f(x)$在$(-\delta,0)$内单调减少

C. 对任意的 $x\in(0,\delta)$有 $f(x)>f(0)$　　D. 对任意的 $x\in(-\delta,0)$有 $f(x)>f(0)$

解 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}>0$，则存在 $\delta>0$，对任意的 $x\in(-\delta,0)$有 $f(x)<f(0)$，对任意的 $x\in(0,\delta)$有 $f(x)>f(0)$，故选 C.

8. 设函数 $f(x)$在 $x=0$ 处可导，$f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-2x)}{\tan x}=$ ________.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot\dfrac{x}{\tan x}+\dfrac{f(-2x)-f(0)}{-2x}\cdot\dfrac{2x}{\tan x}\right)=f'(0)+2f'(0)=3f'(0)=3$.

习题 2.2

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^3+\dfrac{5}{x^4}-\dfrac{1}{x}+10$；　(2) $y=4x^5-2^x+3e^x$；　(3) $y=\tan x-2\sec x+3$；

(4) $y=\sin x\cdot\cos x$；　(5) $y=x\ln x-x^2$；　(6) $y=3e^x\cos x$；

(7) $y=\dfrac{e^x}{x^2}+\ln 2$；　(8) $y=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$；　(9) $y=x(x+1)\tan x$.

解 (1) $y'=3x^2-\dfrac{20}{x^5}+\dfrac{1}{x^2}$；

(2) $y'=20x^4-2^x\ln 2+3e^x$；

(3) $y'=\sec^2 x-2\sec x\tan x$；

(4) $y'=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$；

(5) $y'=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}-2x=\ln x-2x+1$；

(6) $y'=3e^x(\cos x-\sin x)$；

(7) $y'=e^x\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)$；

(8) $y'=\dfrac{\sin^2 x-(1-\cos x)\cos x}{\sin^2 x}=\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$；

(9) $y'=(x+1)\tan x+x\tan x+x(x+1)\sec^2 x$.

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=\sin x-\cos x$，求 $y'|_{x=\frac{\pi}{6}}$ 和 $y'|_{x=\frac{\pi}{4}}$；　　(2) $\rho=\theta\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$，求 $\left.\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$.

解　(1) $y'=\cos x+\sin x$，故

$$y'|_{x=\frac{\pi}{6}}=\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2},\qquad y'|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$

(2) $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}=\sin\theta+\theta\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta+\theta\cos\theta$，$\left.\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$.

3. 求下列函数的导数：

(1) $y=(2x+5)^4$；　(2) $y=\cos(4-3x)$；　(3) $y=\mathrm{e}^{-3x^2}$；　(4) $y=\ln(1+x^2)$；

(5) $y=\sin^2 x$；　(6) $y=\arctan(\mathrm{e}^x)$；　(7) $y=(\arcsin x)^2$；　(8) $y=\ln\cos x$.

解　(1) $y'=4(2x+5)^3\cdot 2=8(2x+5)^3$；

(2) $y'=-\sin(4-3x)\cdot(-3)=3\sin(4-3x)$；

(3) $y'=\mathrm{e}^{-3x^2}\cdot(-6x)=-6x\mathrm{e}^{-3x^2}$；

(4) $y'=\frac{2x}{1+x^2}$；

(5) $y'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$；

(6) $y'=\frac{1}{1+(\mathrm{e}^x)^2}\cdot\mathrm{e}^x=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$；

(7) $y'=2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(8) $y'=\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)=-\tan x$.

4. 求下列函数的导数：

(1) $y=\arcsin(2x+5)$；　(2) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　(3) $y=\mathrm{e}^{-3x^2}\cos 2x$；

(4) $y=\ln(1+x^2)$；　(5) $y=\arcsin\sqrt{x}$；　(6) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$；

(7) $y=\ln(\sec x+\tan x)$；　(8) $y=\ln(\csc x+\cot x)$.

解　(1) $y'=\frac{1}{\sqrt{1-(2x+5)^2}}\cdot 2$；

(2) $y=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$；　$y'=-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x)=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$；

(3) $y'=\mathrm{e}^{-3x^2}\cdot(-6x)\cos 2x+\mathrm{e}^{-3x^2}\cdot(-\sin 2x)\cdot 2=-2\mathrm{e}^{-3x^2}(3x\cos 2x+\sin 2x)$；

(4) $y'=\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x$；

(5) $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$；

(6) $y'=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$；

(7) $y'=\frac{1}{\sec x+\tan x}(\sec x\cdot\tan x+\sec^2 x)=\sec x$；

(8) $y'=\frac{1}{\csc x+\cot x}(-\csc x\cdot\cot x-\csc^2 x)=-\csc x$.

5. 求下列函数的导数：

(1) $y=\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}$；　(2) $y=\ln\tan 2x$；　(3) $y=\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}$；　(4) $y=\ln\ln\ln x$；

(5) $y=\sin^2 x\cdot\sin x^2$；(6) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$；(7) $y=\arccos\sqrt{1-3x}-2^{-\frac{1}{x}}$；(8) $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$，求 $y'|_{x=2}$.

解 (1) $y'=\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sec^2\dfrac{1}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$；

(2) $y'=\dfrac{1}{\tan 2x}\cdot\sec^2 2x\cdot 2$；

(3) $y'=\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$；

(4) $y'=\dfrac{1}{\ln\ln x}\cdot\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}$；

(5) $y'=2\sin x\cdot\cos x\cdot\sin x^2+\sin^2 x\cdot\cos x^2\cdot 2x$；

(6) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$；

(7) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-3x)}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1-3x}}\cdot(-3)-2^{-\frac{1}{x}}\cdot\ln 2\cdot\dfrac{1}{x^2}$

$=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-3x}}-2^{-\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{x^2}\cdot\ln 2$；

(8) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}}\cdot\dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}$，$y'|_{x=2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

6. 设 $f(x)=(ax+b)\sin x+(cx+d)\cos x$，确定 a,b,c,d 使 $f'(x)=x\cos x$.

解 $f'(x)=a\sin x+(ax+b)\cos x+c\cos x-(cx+d)\sin x=(a-cx-d)\sin x+(ax+b+c)\cos x=x\cos x$，则有 $a-d=0$，$c=0$，$a=1$，$b+c=0$，即 $a=1$，$b=c=0$，$d=1$.

7. 求垂直于直线 $2x-6y+1=0$，且与曲线 $y=x^3-3x^2-5$ 相切的直线方程.

解 直线 $2x-6y+1=0$ 的斜率为 $k=\dfrac{1}{3}$，则所求切线的斜率为 -3. 由 $y'=3x^2-6x=-3$，解得 $x=1$，$y=-7$，所求直线方程为 $y+7=-3(x-1)$.

8. 设 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，又 $f'(x)=\arctan x^2$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)\dfrac{3(3x+2)-3(3x-2)}{(3x+2)^2}=f'\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)\dfrac{12}{(3x+2)^2}=\arctan\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^2\dfrac{12}{(3x+2)^2}$，

$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\arctan\left(\dfrac{0-2}{0+2}\right)^2\times\dfrac{12}{(0+2)^2}=\dfrac{\pi}{4}\times 3=\dfrac{3\pi}{4}$.

9. 求 $\dfrac{\mathrm{d}(\sin x^2)}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2(\sin x^2)}{\mathrm{d}x^2}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}(\sin x^2)}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}(\sin x^2)}{\mathrm{d}(x^2)}\dfrac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}x}=2x\cos x^2$，

$\dfrac{\mathrm{d}^2(\sin x^2)}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}\sin x^2}{\mathrm{d}x}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x\cos x^2)=2\cos x^2-4x^2\sin x^2$.

提高题

1. 设 $y=x^{\sin x}$，$x>0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 $y=\mathrm{e}^{\sin x\ln x}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{\sin x\ln x}\left[\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right]$.

2. 设 $f(x)$ 可导，求下列函数的导数 $\frac{dy}{dx}$：

(1) $y=f(x^2)$；　　(2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$.

解 (1) $\frac{dy}{dx}=2xf'(x^2)$；

(2) $\frac{dy}{dx}=f'(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cos x+f'(\cos^2 x)\cdot(-2\sin x\cos x)=\sin 2x[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$.

3. 求 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 的导数.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$.

4. 求函数 $y=f^n(\varphi^n(\sin x^n))$ 的导数，其中 f,φ 均可导.

解 $\frac{dy}{dx}=nf^{n-1}(\varphi^n(\sin x^n))f'(\varphi^n(\sin x^n))\cdot n\varphi^{n-1}(\sin x^n)\varphi'(\sin x^n)\cdot\cos x^n\cdot nx^{n-1}$.

5. 验证 $(\sqrt{x^2-a^2})'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$，$(\sqrt{a^2-x^2})'_x=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 并记住.

解 答略.

习题 2.3

1. 求下列函数的二阶导数：

(1) $y=2x^2+\ln x$；　　(2) $y=e^{2x-1}$；　　(3) $y=x\cos x$；

(4) $y=e^{-t}\sin t$；　　(5) $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$；　　(6) $y=(1+x^2)\arctan x$.

解 (1) $y'=4x+\frac{1}{x}$，　$y''=4-\frac{1}{x^2}$；

(2) $y'=2e^{2x-1}$，　$y''=4e^{2x-1}$；

(3) $y'=\cos x-x\sin x$；　$y''=-\sin x-\sin x-x\cos x=-2\sin x-x\cos x$；

(4) $y'=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t=e^{-t}(\cos t-\sin t)$，

$y''=-e^{-t}(\cos t-\sin t)+e^{-t}(-\sin t-\cos t)=e^{-t}(-2\cos t)=-2e^{-t}\cos t$；

(5) $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\cdot(-2x)=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$，

$y''=-\frac{3}{2}\cdot(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-2x)=\frac{3x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$；

(6) $y'=2x\arctan x+1$，　$y''=2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}$.

2. 设 $y=f[x\varphi(x)]$，其中 f,φ 具有二阶导数，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\frac{dy}{dx}=f'(x\varphi(x))(\varphi(x)+x\varphi'(x))$，

$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x\varphi(x))(\varphi(x)+x\varphi'(x))^2+f'(x\varphi(x))(2\varphi'(x)+x\varphi''(x))$.

3. 设 $f(x)=(x-a)^3\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 有二阶连续导数，问 $f'''(a)$ 是否存在；若不存在，请说明理由；若存在，求出其值.

解 $f'(x)=3(x-a)^2\varphi(x)+(x-a)^3\varphi'(x)$，

$f''(x)=6(x-a)\varphi(x)+6(x-a)^2\varphi'(x)+(x-a)^3\varphi''(x)$，

$f'''(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)-f''(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{6(x-a)\varphi(x)+6(x-a)^2\varphi'(x)+(x-a)^3\varphi(x)-0}{x-a}=6\varphi(a)$.

4. 问自然数 n 至少多大,才能使

$$f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处二阶可导,并求 $f''(0)$.

解 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n\sin\dfrac{1}{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}$,

要使上式极限存在,则要求 $n-1>0$,即 $n>1$,且 $f'(0)=0$.

当 $x\neq 0$ 时,$f'(x)=nx^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x}$,于是

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{nx^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x}}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(nx^{n-2}\sin\frac{1}{x}-x^{n-3}\cos\frac{1}{x}\right),$$

$f''(0)$存在的话只能为 0,上式极限存在要求 $n-3>0$,即 $n>3$. 故当 $n>3$ 时,$f''(0)$存在,且 $f''(0)=0$.

5. 求下列函数的 n 阶导数:

(1) $y=\sin^2 x$; (2) $y=x\ln x$; (3) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$; (4) $y=xe^x$.

解 (1) $y=\dfrac{1-\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$, $y^{(n)}=-\dfrac{1}{2}\cdot 2^n\cdot\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)=-2^{n-1}\cdot\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

(2) $y=\ln x+1$, $y'=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$, $y''=(-1)x^{-2}$, $y'''=(-1)\cdot(-2)x^{-3}=(-1)^2\cdot 2!\cdot x^{-3},\cdots$,

$y^{(n)}=(-1)^{(n-1)}\cdot(n-1)!\cdot x^{-n}$.

(3) $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{(x-2)}-\dfrac{1}{(x-1)}=(x-2)^{-1}-(x-1)^{-1}$,

$y'=(-1)[(x-2)^{-2}-(x-1)^{-2}]$, $y''=(-1)(-2)[(x-2)^{-3}-(x-1)^{-3}],\cdots$,

$y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\,[(x-2)^{-(n+1)}-(x-1)^{-(n+1)}]$.

(4) $y'=e^x+xe^x=e^x(1+x)$, $y''=e^x(1+x)+e^x=e^x(2+x),\cdots,y^{(n)}=e^x(n+x)$.

6. 求下列函数指定阶的导数:

(1) $y=x^2\sin 3x$, 求 $y^{(50)}$; (2) $y=e^x\cos x$, 求 $y^{(4)}$.

解 (1) $y^{(50)}=\sum\limits_{k=0}^{50}C_{50}^k\,(x^2)^{(k)}\cdot(\sin 3x)^{(50-k)}$

$$=C_{50}^0x^2\cdot 3^{50}\cdot\sin\left(3x+50\cdot\frac{\pi}{2}\right)+C_{50}^1\cdot 2x\cdot 3^{49}\cdot\sin\left(3x+49\cdot\frac{\pi}{2}\right)+C_{50}^2\cdot 2\cdot 3^{48}\cdot\sin\left(3x+48\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=x^2\cdot 3^{50}\cdot\sin\left(3x+50\cdot\frac{\pi}{2}\right)+50\cdot 2x\cdot 3^{49}\cdot\sin\left(3x+49\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\frac{50\times 49}{2}\cdot 2\times 3^{48}\cdot\sin\left(3x+48\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-3^{50}\cdot x^2\sin 3x+3^{49}\cdot 100x\cdot\cos 3x+3^{48}\cdot 50\times 49\sin 3x$$

$$=3^{48}(-9x^2\sin 3x+300x\cos 3x+2450\sin 3x);$$

(2) $y^{(4)}=\sum\limits_{k=0}^{4}C_4^k\,(e^x)^{(k)}\,(\cos x)^{(4-k)}$

$$=e^x\cos\left(x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right)+C_4^2\cdot e^x\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)+e^x\cos x=-4e^x\cos x.$$

提高题

1. $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$,求 $f^{(n)}(x)$.

解 $y=\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x,$$

$$y'=\frac{1}{4}(-\sin 4x)\cdot 4=4^0\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right),\quad y''=4\cos\left(4x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),\cdots$$

所以 $y^{(n)}=4^{n-1}\cos\left(4x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

2. $f'(x)=2f(x)$，$f(0)=1$，求 $f^{(n)}(0)$.

解 $f'(x)=2f(x)$，$\quad f''(x)=2f'(x)=2\cdot 2f(x)$，

$f'''(x)=2^2f'(x)=2^3f(x)$，…，$f^{(n)}(x)=2^nf(x)$，故 $f^{(n)}(0)=2^nf(0)=2^n$.

3. $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$，$f(0)=1$，求 $f^{(n)}(0)$.

解 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$，$\quad f''(x)=\mathrm{e}^{f(x)}\cdot f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}\cdot\mathrm{e}^{f(x)}=\mathrm{e}^{2f(x)}$，

$f'''(x)=\mathrm{e}^{2f(x)}\cdot 2f'(x)=2\mathrm{e}^{3f(x)}$，$\quad f^{(4)}(x)=2\mathrm{e}^{3f(x)}\cdot 3f'(x)=3!\cdot\mathrm{e}^{3f(x)}\cdot\mathrm{e}^{f(x)}=3!\cdot\mathrm{e}^{4f(x)}$，…，

$f^{(n)}(x)=(n-1)!\cdot\mathrm{e}^{nf(x)}$，故 $f^{(n)}(0)=(n-1)!\cdot\mathrm{e}^n$.

4. 设 y 的 $n-2$ 阶导数 $y^{(n-2)}=\dfrac{x}{\ln x}$，求 y 的 n 阶导数 $y^{(n)}$.

解 $y^{(n-2)}=\dfrac{x}{\ln x}$，$\quad y^{(n-1)}=[y^{(n-2)}]'=\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)'=\dfrac{\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$，

$$y^{(n)}=[y^{(n-1)}]'=\left(\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\right)'=\frac{\frac{1}{x}\cdot\ln^2 x-(\ln x-1)\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^4 x}=\frac{2-\ln x}{x\ln^3 x}.$$

5. 设 $y=f(x^2+b)$，其中 b 为常数，f 存在二阶导数，求 y''.

解 $y'=f'(x^2+b)\cdot 2x$，$\quad y''=f''(x^2+b)\cdot(2x)^2+2f'(x^2+b)=f''(x^2+b)\cdot 4x^2+2f'(x^2+b)$.

6. 设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，求 $y^{(n)}(0)$.

解 $y'=(-1)(2x+3)^{-2}\cdot 2$，$\quad y''=(-1)(-2)(2x+3)^{-3}\cdot 2^2$，…，

$y^{(n)}=(-1)(-2)\cdot\cdots\cdot(-n)(2x+3)^{-(n+1)}\cdot 2^n=(-1)^n n!\,(2x+3)^{-(n+1)}\cdot 2^n$，

$y^{(n)}(0)=(-1)^n n!\cdot 3^{-(n+1)}\cdot 2^n$.

习题 2.4

1. 求下列方程确定的隐函数的导数：

(1) $y^2+2xy+9=0$； (2) $x^3+y^3-3axy=0$；

(3) $xy=\sin(x+y)$； (4) $y=1-x\mathrm{e}^y$.

解 (1) 两边关于 x 求导 $2yy'+2y+2xy'=0$，即 $(y+x)y'=-y$，故 $y'=-\dfrac{y}{y+x}$.

(2) 两边关于 x 求导 $3x^2+3y^2\cdot y'-3ay-3axy'=0$，即 $(3y^2-3ax)y'=3ay-3x^2$，故 $y'=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$.

(3) 两边关于 x 求导 $y+xy'=\cos(x+y)\cdot(1+y')$，即 $(x-\cos(x+y))y'=\cos(x+y)-y$，故 $y'=\dfrac{\cos(x+y)-y}{x-\cos(x+y)}$.

(4) 两边关于 x 求导 $y'=-\mathrm{e}^y-x\mathrm{e}^y\cdot y'$，即 $(1+x\mathrm{e}^y)y'=-\mathrm{e}^y$，故 $y'=-\dfrac{\mathrm{e}^y}{1+x\mathrm{e}^y}$.

2. 设 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 $\arctan\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$. 两边关于 x 求导

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{xy'-y}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}(2x+2yy'),\text{即 } xy'-y=x+y\cdot y',$$

于是 $(x-y)y'=x+y$，故 $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$.

对方程 $xy'-y=x+y\cdot y'$ 两边关于 x 求导得

$$y'+xy''-y'=1+y'^2+y\cdot y'',\text{故 } y''=\frac{1+y'^2}{x-y}=\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{(x-y)^3}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

3. 设 $xy-\ln y=0$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

解 取 $x=0$，得 $y=1$. 两边关于 x 求导

$$y+xy'-\frac{1}{y}y'=0,\text{故 } y'=\frac{y^2}{1-xy},\quad y'\big|_{x=0}=y'\big|_{\substack{x=0\\y=1}}=1.$$

$$y''=\frac{2yy'(1-xy)-y^2(-y-xy')}{(1-xy)^2},\quad y''\big|_{x=0}=y''\big|_{\substack{x=0\\y=1\\y'=1}}=\frac{2+1}{1}=3.$$

4. 求下列函数的导数：

(1) $y=(1+x^2)^{\sin x}$；

(2) $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$；

(3) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$；

(4) $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}$.

解 (1)两边取自然对数，得 $\ln y=\sin x\ln(1+x^2)$.

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\ln(1+x^2)+\sin x\cdot\frac{2x}{1+x^2},\text{故 } y'=(1+x^2)^{\sin x}\left[\cos x\ln(1+x^2)+\sin x\cdot\frac{2x}{1+x^2}\right].$$

(2) 两边取自然对数，得 $\ln y=x\,[\ln|x|-\ln|1+x|]$.

$$\frac{1}{y}y'=\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|-x\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right],\text{故 } y'=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\left[\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|-\frac{1}{1+x}\right].$$

(3) 两边取自然对数，得

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln|x+2|+4\ln|3-x|-5\ln|x+1|,$$

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{4}{3-x}-\frac{5}{x+1},\text{故 } y'=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}\left(\frac{1}{2x+4}-\frac{4}{3-x}-\frac{5}{x+1}\right).$$

(4) 两边取自然对数，得

$$\ln y=\frac{1}{2}\left(\ln|x|+\ln|\sin x|+\frac{1}{2}\ln|1-\mathrm{e}^x|\right),$$

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}\right),\text{故 } y'=\frac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}\left(\frac{1}{x}+\cot x-\frac{\mathrm{e}^x}{2(1-\mathrm{e}^x)}\right).$$

5. 求下列函数的导数：

(1) $\begin{cases}x=\sin t,\\y=\cos 2t,\end{cases}$ 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$；

(2) 设 $x=\alpha\ln\cot\theta$，$y=\tan\theta$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(3) 设 $x=f'(t)$，$y=tf'(t)-f(t)$，又 $f''(t)$ 存在且不为零，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 (1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{-2\sin 2t}{\cos t}=-4\sin t$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=-2\sqrt{2}$.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}=\dfrac{\sec^2\theta}{\alpha\cdot\frac{1}{\cot\theta}(-\csc^2\theta)}=-\dfrac{1}{\alpha}\tan\theta$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx}=\frac{\left(-\frac{1}{\alpha}\tan\theta\right)'_\theta}{x'_\theta}=\frac{-\frac{1}{\alpha}\cdot\sec^2\theta}{\alpha\cdot\frac{1}{\cot\theta}\cdot(-\csc^2\theta)}=-\frac{1}{\alpha^2}\tan\theta.$$

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(t)'_t}{f''(t)}=\frac{1}{f''(t)}.$

提高题

1. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t+e^t,\\ y=\sin t\end{cases}$ 确定，则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$________.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos t}{1+e^t}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d\left(\frac{\cos t}{1+e^t}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{(1+e^t)\sin t+e^t\cos t}{(1+e^t)^3}$，所以 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=-\frac{1}{8}$.

2. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right)$.

解 将 $x=0$ 代入方程得 $y=1$. 在 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 两边关于 x 求导，得

$$-\sin(xy)\cdot(y+xy')+\frac{1}{y}y'-1=0.$$

将 $x=0,y=1$ 代入上式，得

$$\sin0\cdot(1+0)+\frac{1}{1}y'-1=0，故\ y'=1，\quad 即\ y'(0)=f'(0)=1.$$

$$\lim_{n\to\infty}n\left(f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right)=\lim_{n\to\infty}2\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)=2.$$

3. 曲线 L 的极坐标方程为 $r=\theta$，求 L 在点 $(r,\theta)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程.

解 先把曲线方程化为参数方程

$$\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta=\theta\cos\theta,\\ y=r(\theta)\sin\theta=\theta\sin\theta,\end{cases}$$

于是在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 处，$x=0,y=\frac{\pi}{2}$，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}\right|_{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$，则 L 在点 $(r,\theta)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程为 $y-\frac{\pi}{2}=-\frac{2}{\pi}(x-0)$，即 $y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}$.

4. 求曲线 $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)=e^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程.

解 方程两边关于 x 求导得 $\sec^2\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)\cdot(1+y')=e^y\cdot y'$.

将 $x=0,y=0$ 代入上式得 $(\sqrt{2})^2(1+y')=y'$，故 $y'=-2$，即 $y'(0)=-2$. 所以切线方程为 $y=-2x$.

5. 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2+y=\tan(x-y)$ 所确定且满足 $y(0)=0$，求 $y''(0)$.

解 在方程 $x^2+y=\tan(x-y)$ 中关于 x 求导

$$2x+y'=\sec^2(x-y)\cdot(1-y'). \tag{1}$$

将 $x=0,y=0$ 代入上式得 $y'=\frac{1}{2}$. 在 (1)式两边关于 x 求导，得

$$2+y''=2\sec^2(x-y)\tan(x-y)\cdot(1-y')^2+\sec^2(x-y)(-y'').$$

将 $x=0,y=0,y'=\frac{1}{2}$代入上式，得 $2+y''=0+(-y'')$，故得 $y''=-1$，即 $y''(0)=-1$.

习题 2.5

1. 求函数 $y=x^2$ 当 x 由 1 改变到 1.01 的微分.

解 因为 $\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x$，由题设条件知 $x=1,\mathrm{d}x=\Delta x=1.01-1=0.01$，所以 $\mathrm{d}y=2\times1\times0.01=0.02$.

2. 求函数 $y=x^3$ 在 $x=2$ 处的微分.

解 函数 $y=x^3$ 在 $x=2$ 处的微分为 $\mathrm{d}y=(x^3)'|_{x=2}\mathrm{d}x=12\mathrm{d}x$.

3. 求下列函数的微分：

(1) $y=x^3\mathrm{e}^{2x}$；　(2) $y=\frac{\sin x}{x}$；　(3) $y=\sin(2x+1)$；

(4) $y=\ln(1+\mathrm{e}^{x^2})$；　(5) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；　(6) $y=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2}$.

解 (1) $y'=(x^3\mathrm{e}^{2x})'=3x^2\mathrm{e}^{2x}+2x^3\mathrm{e}^{2x}=x^2\mathrm{e}^{2x}(3+2x)$，　$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=x^2\mathrm{e}^{2x}(3+2x)\mathrm{d}x$.

或利用微分形式不变性

$$\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}(x^3)+x^3\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})=\mathrm{e}^{2x}\cdot3x^2\mathrm{d}x+x^3\cdot2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=x^2\mathrm{e}^{2x}(3+2x)\mathrm{d}x.$$

(2) 因为 $y'=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，所以 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\mathrm{d}x$.

(3) 设 $y=\sin u,u=2x+1$，则

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}(\sin u)=\cos u\mathrm{d}u=\cos(2x+1)\mathrm{d}(2x+1)=\cos(2x+1)\cdot2\mathrm{d}x=2\cos(2x+1)\mathrm{d}x.$$

注 与复合函数求导类似，求复合函数的微分也可不写出中间变量，这样更加直接和方便.

(4) $\mathrm{d}y=\mathrm{d}\ln(1+\mathrm{e}^{x^2})=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^{x^2})=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2)=\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{1+\mathrm{e}^{x^2}}2x\mathrm{d}x=\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\mathrm{d}x$.

(5) $\mathrm{d}y=\mathrm{d}\ln(x+\sqrt{x^2+1})=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}(x+\sqrt{x^2+1})=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

(6) $\mathrm{d}y=\frac{x^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})-\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}(x^2)}{(x^2)^2}=\frac{x^2\mathrm{e}^{2x}\cdot2\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}\cdot2x\mathrm{d}x}{x^4}=\frac{2\mathrm{e}^{2x}(x-1)}{x^3}\mathrm{d}x$.

4. 在下列等式的括号中填入适当的函数，使等式成立：

(1) $\mathrm{d}(\quad)=\cos\omega t\mathrm{d}t$；　(2) $\mathrm{d}(\sin x^2)=(\quad)\mathrm{d}(\sqrt{x})$.

解 (1) $\mathrm{d}(\sin\omega t)=\omega\cos\omega t\mathrm{d}t$，　$\cos\omega t\mathrm{d}t=\frac{1}{\omega}\mathrm{d}(\sin\omega t)=\mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$；

一般地，有 $\mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t+C\right)=\cos\omega t\mathrm{d}t$.

(2) $\frac{\mathrm{d}(\sin x^2)}{\mathrm{d}(\sqrt{x})}=\frac{2x\cos x^2\mathrm{d}x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x}=4x\sqrt{x}\cos x^2$，　$\mathrm{d}(\sin x^2)=(4x\sqrt{x}\cos x^2)\mathrm{d}(\sqrt{x})$.

5. 求由方程 $\mathrm{e}^{xy}=2x+y^3$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$的微分 $\mathrm{d}y$.

解 对方程两边求微分，得　$\mathrm{d}(\mathrm{e}^{xy})=\mathrm{d}(2x+y^3)$，$\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}(xy)=\mathrm{d}(2x)+\mathrm{d}(y^3)$，

$$\mathrm{e}^{xy}(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=2\mathrm{d}x+3y^2\mathrm{d}y\text{，于是 }\mathrm{d}y=\frac{2-y\mathrm{e}^{xy}}{x\mathrm{e}^{xy}-3y^2}\mathrm{d}x.$$

6. 导出近似公式(当$|\Delta x|$远远小于$|x|$时)：$\sqrt[3]{x+\Delta x}\approx\sqrt[3]{x}+\frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$，并按此公式求 $\sqrt[3]{25}$的近似值，结果取小数点后四位.

解 设 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x$，$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$，从而有

$\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}\approx\frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$，移项得近似公式：$\sqrt[3]{x+\Delta x}\approx\sqrt[3]{x}+\frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

因为 $\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{27-2}=3\left(1-\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$，令 $x=1,\Delta x=-\frac{2}{27}$，则 $\left(1-\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}}\approx\sqrt[3]{1}+\frac{-\frac{2}{27}}{3\sqrt[3]{1}}=1-\frac{2}{81}=\frac{79}{81}$，所以 $\sqrt[3]{25}\approx3\cdot\frac{79}{81}=\frac{79}{27}=2.9259$.

7. 计算下列各数的近似值：(1) $\sqrt[3]{998.5}$；(2) $e^{-0.03}$.

【分析】 $|x|$很小时，$(1+x)^{\frac{1}{3}}\approx1+\frac{1}{3}x$，$e^x\approx1+x$.

解 (1) $\sqrt[3]{998.5}=\sqrt[3]{1000-1.5}=\sqrt[3]{1000\left(1-\frac{1.5}{1000}\right)}=10\sqrt[3]{1-0.0015}$

$$\approx10\left(1-\frac{1}{3}\times0.0015\right)=9.995.$$

(2) $e^{-0.03}\approx1-0.03=0.97$.

提高题

$y=2^{\tan x}$，求 dy.

解 $dy=d2^{\tan x}=2^{\tan x}\ln2\,d\tan x=2^{\tan x}\ln2\cdot\sec^2x\,dx$.

复习题 2

1. 判断题

(1) $(x^2+1)'=2x+1$. ( )

(2) 设函数 $f(x)$在 x 处可导，那么 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}=f'(x)$成立. ( )

(3) 设函数 $y=e^x$，则 $y^{(n)}=ne^x$. ( )

(4) $f''(100)=[f'(100)]'$. ( )

(5) 若 $u(x),v(x),w(x)$都是 x 的可导函数，则$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$. ( )

(6) 若 $y=f(e^x)e^{f(x)}$，$f'(x)$存在，那么有 $y'_x=f'(e^x)e^{f(x)}+e^{f(x)}f'(x)f(e^x)$. ( )

答案 (1) √；(2) √；(3) ×；(4) ×；(5) √；(6) ×.

2. 填空题

(1) 曲线 $f(x)=\sqrt{x}+1$ 在(1,2)点处的切线的斜率是________.

(2) 曲线 $f(x)=e^x$ 在(0,1)点的切线方程是________.

(3) 已知 $f(x)=x^3+3^x$，则 $f'(3)=$________.

(4) 函数 $y=x^3-2$，当 $x=2,\Delta x=0.1$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=$________.

(5) 若函数 $f(x)$可导及 n 为自然数，则$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=$________.

(6) 曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0,f(x_0))$的法线斜率为________.

(7) 设函数 $y=y(x)$是由方程 $x^2+y^2=1$ 确定，则 $y'=$________.

(8) d ________ $=\sin3x\,dx$.

答案 (1) $\frac{1}{2}$； (2) $y=x+1$； (3) $f'(3)=27(1+\ln3)$； (4) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=12.61$；

(5) $f'(x)$； (6) $-\frac{1}{f'(x_0)}$； (7) $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$； (8) $-\frac{1}{3}\cos3x$.

3. 单项选择题

(1) 下列函数中，在 $x=0$ 处可导的是( ).

A. $y=|x|$　　B. $y=2\sqrt{x}$　　C. $y=x^3$　　D. $y=|\sin x|$

(2) 下列函数在 $x=0$ 处不可导的是(　　).

A. $y=2\sqrt{x}$　　B. $y=\sin x$　　C. $y=\cos x$　　D. $y=x^3$

(3) 设函数 $y=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ ax+b, & x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续且可导,则(　　).

A. $a=1,b=2$　　B. $a=3,b=2$　　C. $a=-2,b=1$　　D. $a=2,b=-1$

(4) 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导,则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$(　　).

A. $-f'(x_0)$　　B. $f'(-x_0)$　　C. $f'(x_0)$　　D. $2f'(x_0)$

(5) 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导,当 $f'(x_0)=$(　　)时,有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0)}=\dfrac{1}{4}$.

A. 4　　B. -4　　C. 2　　D. -2

(6) 设 $f(x)$ 在 x_0 处不连续,则 $f(x)$ 在 x_0 处(　　).

A. 必不可导　　B. 一定可导　　C. 可能可导　　D. 无极限

(7) 若 $f(x)=e^{-x}\cos x$,则 $f'(0)=$(　　).

A. 2　　B. 1　　C. -1　　D. -2

(8) 设 $y=f(x)$ 是可微函数,则 $df(\cos 2x)=$(　　).

A. $2f'(\cos 2x)dx$　　B. $f'(\cos 2x)\sin 2x d2x$

C. $2f'(\cos 2x)\sin 2x dx$　　D. $-f'(\cos 2x)\sin 2x d2x$

答案　(1) C ;(2) A;(3) D;(4) A;(5) D;(6) A;(7) C;(8) D.

4. 计算下列各题:

(1) 设 $y=x^2e^{\frac{1}{x}}$,求 y';

(2) 设 $y=x\sqrt{x}+\ln\cos x$,求 y';

(3) $y=\ln\sqrt{x}+\sqrt{\ln x}$,求 $\dfrac{dy}{dx}$;

(4) $y=\ln(x-\sqrt{x^2-a^2})$,求 $\dfrac{dy}{dx}$;

(5) 设 $y=\sqrt[7]{x}+\sqrt[x]{7}+\sqrt[7]{7}$,求 $\dfrac{dy}{dx}$;

(6) $y=f(\ln x)e^{f(x)}$,$f(x)$ 可导,求 $\dfrac{dy}{dx}$;

(7) $y=\arcsin(\sin x)$,求 $\dfrac{dy}{dx}$;

(8) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\tan x$,求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解　(1) $y'(x)=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$;

(2) $y'(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}-\tan x$;

(3) $y=\dfrac{1}{2}\ln x+\sqrt{\ln x}$,　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\dfrac{1}{x}$;

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-a^2}}\cdot\left(1-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-a^2}}\cdot 2x\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$;

(5) $y'=\left(x^{\frac{1}{7}}+7^{\frac{1}{x}}+\sqrt[7]{7}\right)'=\dfrac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}}-7^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{x^2}\ln 7$;

(6) $\dfrac{dy}{dx}=f'(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}\cdot e^{f(x)}+f(\ln x)\cdot e^{f(x)}\cdot f'(x)$;

(7) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$;

(8) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{2}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\sin x\cdot\ln\tan x-\cos x\cdot\dfrac{1}{\tan x}\sec^2 x$

$=\dfrac{1}{\sin x}+\sin x\cdot\ln\tan x-\dfrac{1}{\sin x}=\sin x\cdot\ln\tan x$.

5. 求等边双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 处的切线的斜率，并写出在该点处的切线方程和法线方程.

解　由导数的几何意义，得切线斜率为 $k=y'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{x}\right)'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-\frac{1}{x^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-4$.

所求切线方程为 $y-2=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)$，即 $4x+y-4=0$.

法线方程为 $y-2=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)$，即 $2x-8y+15=0$.

6. 求曲线 $y=\sqrt{x}$ 在点 $(4,2)$ 处的切线方程.

解　因为 $y'=(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，　$k=y'\Big|_{x=4}=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$，故所求切线方程为

$$y-2=\frac{1}{4}(x-4),\quad 即 -x+4y-4=0.$$

7. 已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解　当 $x\neq 0$ 时，用公式有 $f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x-0}{x-0}=1,\quad f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0}=1,$$

$f'_-(0)=f'_+(0)=1$，故 $f'(0)=1$，所以 $f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$

8. 已知 $y=x+x^x$，求 y'.

解　$y'=(x+e^{x\ln x})'=1+e^{x\ln x}(x\ln x)'=1+x^x(\ln x+1)$.

9. 求由方程 $xy+\ln y=1$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 在点 $M(1,1)$ 处的切线方程.

解　在题设方程两边同时对自变量 x 求导，得 $y+xy'+\frac{1}{y}y'=0$，解得 $y'=-\frac{y^2}{xy+1}$. 在点 $M(1,1)$ 处，$y'\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=-\frac{1^2}{1\times 1+1}=-\frac{1}{2}$. 于是，在点 $M(1,1)$ 处的切线方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$，即 $x+2y-3=0$.

10. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2+y^2-xy=4$ 确定的隐函数，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

解　方程两边关于 x 求导得 $2x+2yy'-y-xy'=0$，即 $(2y-x)y'=y-2x$，故 $y'=\frac{y-2x}{2y-x}$.

对方程 $2x+2yy'-y-xy'=0$ 两边关于 x 求导，得

$$2+2y'^2+2yy''-y'-y'-xy''=0,即\ y''=\frac{2(y'-y'^2-1)}{2y-x}=\frac{-6(x^2+y^2-xy)}{(2y-x)^3}.$$

11. 设 $\cos(x+y)+e^y=1$，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

解　在题设方程两边同时对自变量 x 求导，得 $-\sin(x+y)\cdot\left(1+\frac{dy}{dx}\right)+e^y\frac{dy}{dx}=0$，整理得

$$[-\sin(x+y)+e^y]\frac{dy}{dx}=\sin(x+y),解得\ \frac{dy}{dx}=\frac{\sin(x+y)}{e^y-\sin(x+y)}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{e^y y'(e^y-\sin(x+y))-e^y(e^y y'-\cos(x+y)(1+y'))}{[e^y-\sin(x+y)]^2}$$

$$=\frac{2e^{2y}\cos(x+y)-e^{2y}\sin(x+y)-\frac{1}{2}e^y\sin 2(x+y)}{[e^y-\sin(x+y)]^3}.$$

12. 设 $y=x+\ln y$；求$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 方程两边同时对自变量 x 求导，得

$$\frac{dy}{dx}=1+\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}，故 \frac{dy}{dx}=\frac{y}{y-1}. 于是 \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dy}{dx}(y-1)-y\frac{dy}{dx}}{(y-1)^2}=-\frac{\frac{dy}{dx}}{(y-1)^2}=-\frac{y}{(y-1)^3}.$$

13. $y=1+xe^y$，求$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

解 将 $x=0$ 代入方程中得 $y=1$.

方程两边同时对自变量 x 求导，得 $y'=e^y+xe^y y'$.

将 $x=0,y=1$ 代入上式得 $y'=e$.

在 $y'=e^y+xe^y y'$两边同时对自变量 x 求导，得 $y''=e^y y'+e^y y'+xe^y(y')^2+xe^y y''$.

将 $x=0,y=1,y'=e$ 代入上式得 $y''=2e^2$，即 $y''\big|_{x=0}=y''\big|_{\substack{x=0\\y=1\\y'=e}}=2e^2$.

14. $xy-\sin(\pi y^2)=0$. 求$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\substack{x=0\\y=-1}}$.

解 方程两边同时对自变量 x 求导，得 $y+xy'-\cos(\pi y^2)\cdot 2\pi yy'=0$.

将 $x=0,y=-1$ 代入上式得 $-1-0-\cos\pi\cdot 2\pi\cdot(-1)\cdot y'=0$，即 $y'=-\frac{1}{2\pi}$.

在 $y+xy'-\cos(\pi y^2)\cdot 2\pi yy'=0$ 两边同时对自变量 x 求导，得

$$y'+y'+xy''+\sin(\pi y^2)\cdot(2\pi yy')^2-\cos(\pi y^2)\cdot 2\pi(y')^2-\cos(\pi y^2)\cdot 2\pi yy''=0.$$

将 $x=0,y=-1,y'=-\frac{1}{2\pi}$代入上式得

$$\left(-\frac{1}{2\pi}\right)+\left(-\frac{1}{2\pi}\right)+0+0-\cos(\pi)\cdot 2\pi\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^2-\cos(\pi)\cdot 2\pi(-1)y''=0，故 y''(0)=-\frac{1}{4\pi^2}.$$

15. 求由方程 $xy-e^x+e^y=0$ 所确定的隐函数 y 的导数$\frac{dy}{dx},\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

解 方程两边对 x 求导得 $y+x\frac{dy}{dx}-e^x+e^y\frac{dy}{dx}=0$，解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{e^x-y}{x+e^y}$.

由原方程知 $x=0,y=0$，所以 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{e^x-y}{x+e^y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=1$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(e^x-y')(x+e^y)-(e^x-y)(1+e^y y')}{(x+e^y)^2}，\quad 故\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\substack{x=0\\y=0\\y'=1}}=-2.$$

16. 若 $y^3-x^2y=2$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 两边对 x 求导得 $3y^2y'-2xy-x^2y'=0$，解得 $y'=\frac{2xy}{3y^2-x^2}$，再求导得

$$6yy'^2+3y^2y''-2y-2xy'-2xy'-x^2y''=0,$$

解得 $y''=\frac{4xy'-6yy'^2+2y}{3y^2-x^2}\left(其中 y'=\frac{2xy}{3y^2-x^2}\right)$.

17. 已知$\begin{cases}x=2t-t^2,\\ y=3t-t^3,\end{cases}$求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3-3t^2}{2-2t}=\frac{3}{2}(1+t)$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{3}{2}}{2-2t}=\frac{3}{4(1-t)},\quad 故\frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{t=0}=\frac{3}{4}.$$

18. 设函数 $y=x^3e^{-x}$，求 $y^{(20)}(0)$.

解　$y^{(20)}(x)=C_{20}^0\cdot(e^{-x})^{(20)}x^3+C_{20}^1(e^{-x})^{(19)}(x^3)'+C_{20}^2(e^{-x})^{(18)}(x^3)''+C_{20}^3(e^{-x})^{(17)}(x^3)'''$，

$y^{(20)}(0)=\frac{20\cdot19\cdot18}{3\cdot2\cdot1}(-1)^{17}e^0\cdot6=-6840.$

19. 已知 $f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$，求 $f^{(n)}(0)$.

解　$f(x)=-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}$，　$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$，

$f^{(2k+1)}(0)=0$，　$f^{(2k)}(0)=(2k)!$　　$k=0,1,2,\cdots$.

20. 求微分 dy：

(1) $y=\arcsin\sqrt{x}$；　　(2) $xy=e^{x+y}$；

(3) $y=f(e^x)$；　　(4) $y=a^x+\sqrt{1-a^{2x}}\arccos(a^x)$.

解　(1) $dy=d\arcsin\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{1-x}}d\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$；

(2) $dxy=de^{x+y}$，即 $ydx+xdy=e^{x+y}(dx+dy)$，故 $dy=\frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}dx$.

(3) $dy=df(e^x)=f'(e^x)de^x=f'(e^x)e^x dx$.

(4) $dy=da^x+d\sqrt{1-a^{2x}}\arccos(a^x)=a^x\ln a dx+\arccos a^x\cdot d\sqrt{1-a^{2x}}+\sqrt{1-a^{2x}}d\arccos a^x$

$$=a^x\ln a dx+\arccos a^x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-a^{2x}}}d(1-a^{2x})+\sqrt{1-a^{2x}}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-a^{2x}}}\right)da^x$$

$$=a^x\ln a dx+\arccos a^x\cdot\frac{-2a^{2x}\ln a}{2\sqrt{1-a^{2x}}}dx+\sqrt{1-a^{2x}}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-a^{2x}}}\right)a^x\ln a dx$$

$$=\left(a^x\ln a-\arccos a^x\cdot\frac{a^{2x}\ln a}{\sqrt{1-a^{2x}}}-a^x\ln a\right)dx$$

$$=\left(-\arccos a^x\cdot\frac{a^{2x}\ln a}{\sqrt{1-a^{2x}}}\right)dx.$$

21. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{x}, & 当 x>-1,x\neq0,\\ A, & 当 x=0\end{cases}$ 在 $(-1,+\infty)$ 上连续，求 A 值，并判定 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解　因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$，即 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=A$，则 $A=1$.

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\quad\left(\frac{0}{0}型未定式\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-x}{2x(1+x)}=-\frac{1}{2}.$$

当 $x\neq0$ 时，$f'(x)=\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$，而 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x}=-\frac{1}{2}$，所以 $f'(x)$ 连续.

22. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{1-x}, & x>0,x\neq 1,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x=1,\end{cases}$ 试证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，并求 $f'(1)$.

解 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(1-x)}{1-x}=-1=f(1)$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续；$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x\ln x}{1-x}=0=f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 从而 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续.

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{x\ln x}{1-x}+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x+1-x}{-(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x+1-1}{-2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-2}=-\frac{1}{2}.$$

23. 利用函数的微分代替函数的增量求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

解 设函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，$x_0=1$，$\Delta x=0.02$，则

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=1+\frac{1}{3}\cdot 0.02=1+\frac{2}{300}.$$

自测题 2 答案

1. (1)充分必要；(2) 充分，必要；

(3) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{-h}=-\dfrac{1}{2}f'(3)=-\dfrac{1}{2}\cdot 2=-1$；

(4) 令 $y'=2ax+b=0$，得驻点 $x=-\dfrac{b}{2a}$，也为极值点. 若要曲线与 x 轴相切，则只能是在横坐标为极值点处相切，即 $x=-\dfrac{b}{2a}$，$y=0$.

由 $0=a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2+b\cdot\left(-\dfrac{b}{2a}\right)+c$，得 $b^2=4ac$.

(5) 令 $f(x)=\cos x$，由 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$，得 $\cos(x_0+\Delta x)\approx\cos x_0-\sin x_0\cdot\Delta x$，故

$$\cos 149^\circ=\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\right)\approx\cos\frac{5\pi}{6}-\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{360}.$$

2. (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0)}{-2x}\cdot(-2)+\dfrac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x}}$

$$=\frac{1}{-2f'(x_0)+f'(x_0)}=-\frac{1}{f'(x_0)}=1,$$

故选 C.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\dfrac{1}{2}f'(1)=-1$，则 $f'(1)=-2$，切线斜率 $f'(1)=-2$，故选 B.

(3) $\mathrm{d}f(\mathrm{e}^x)=f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x=f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$，故选 C.

(4) $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{\varphi(a+bx)-\varphi(a)}{x}-\frac{\varphi(a-bx)-\varphi(a)}{x}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\varphi(a+bx)-\varphi(a)}{bx}b+\frac{\varphi(a-bx)-\varphi(a)}{-bx}b\right]$$

$$=2b\varphi'(a),$$

故选 C.

(5) $y=\cos\dfrac{\arcsin x}{2}$，$y'=-\sin\dfrac{\arcsin x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

$$y'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sin\frac{\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=-\sin\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=-\frac{1}{2},$$

故选 A.

3. **解**　(1) $y'=\pi x^{\pi-1}+\pi^x\ln\pi+e^{x\ln x}(1+\ln x)$；

(2) $y'=(a^x\ln a+ax^{a-1})\sin x+(a^x+x^a)\cos x$.

4. **解**　因为是分段函数,所以分段点处的左右导数要分别用定义来求

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-x}-1}{x-0}=-1,\quad f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+ax+b-1}{x-0}=a.$$

当且仅当 $a=-1$ 时,$f(x)$在 $x=0$ 处可导,由可导必连续得 $b=1$;故当 $a=-1,b=1$ 时 $f(x)$可导,且

$$f'(x)=\begin{cases}-e^{-x}, & x<0,\\ -1, & x=0,\\ 2x-1, & x>0.\end{cases}$$

5. **解**　$y'=\dfrac{dy}{dx}=2xf\left(\dfrac{1}{x}\right)+x^2f'\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=2xf\left(\dfrac{1}{x}\right)-f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$,

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=2f\left(\frac{1}{x}\right)+2x\cdot f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)-f''\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=2f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{1}{x}\right).$$

6. **解**

$$y=1+xe^y.\tag{1}$$

将 $x=0$ 代入(1)式得 $y=1$. 在 $y=1+xe^y$ 两边关于 x 求导得

$$y'=e^y+xe^yy'.\tag{2}$$

将 $x=0,y=1$ 代入(2)式,得 $y'(0)=e$.

(2)式两端关于 x 求导得

$$y''=e^yy'+e^yy'+xe^y(y')^2+xe^yy''.\tag{3}$$

将 $x=0,y=1,y'=e$ 代入(3)式得 $y''=2e^2$.

7. **解**　$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}}=(3t+2)(1+t)=3t^2+5t+2$,

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t+5}{1-\frac{1}{1+t}}=\frac{(6t+5)(1+t)}{t}.$$

8. **解**　$y'=\dfrac{dy}{dx}=f'\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)\cdot\dfrac{3(3x+2)-3(3x-2)}{(3x+2)^2}=\arctan\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^2\cdot\dfrac{12}{(3x+2)^2}$,

故 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\arctan1\cdot\dfrac{12}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$.

第 3 章

微分中值定理与导数的应用

3.1 大纲要求及重点内容

1. 大纲要求

(1) 理解罗尔定理、拉格朗日定理和柯西定理,会运用中值定理证明一些等式和不等式.

(2) 掌握函数单调性的判别方法,会求函数的单调区间,会利用单调性证明一些不等式.

(3) 熟练掌握求函数极值的方法,会求函数在闭区间上的最大值和最小值,会解简单的最大值、最小值的应用题.

(4) 会求曲线的凹凸区间和拐点,会求曲线的渐近线,能正确地做出某些函数的图形草图.

(5) 了解泰勒公式、泰勒定理、麦克劳林公式及其拉格朗日型余项,能写出某些初等函数的麦克劳林展开式.

(6) 熟练掌握洛必达法则,会求各类"未定式"的极限.

2. 重点内容

(1) 用中值定理讨论方程在给定区间内的根的情况、证明等式;

(2) 用中值定理和单调性证明不等式;

(3) 用洛必达法则求未定式的极限;

(4) 函数的极值、单调性、凹凸性、拐点及渐近线的求法;

(5) 函数的最大值和最小值以及求实际问题的最大值或最小值.

3.2 内容精要

1. 中值定理与泰勒公式

定理 1(费尔马定理) 若函数 $f(x)$满足条件:

(1) $f(x)$在点 x_0 的某邻域有定义,并且在某邻域内恒有 $f(x)\leqslant f(x_0)$或 $f(x)\geqslant f(x_0)$;

(2) $f(x)$在 x_0 处可导.
则有 $f'(x_0)=0$.

定理 2(罗尔定理) 设函数 $f(x)$满足条件:

(1) 在$[a,b]$上连续;

(2) 在(a,b)内可导;

(3) $f(a)=f(b)$.

则在(a,b)内至少存在一点 ξ 使 $f'(\xi)=0$.

定理 3(拉格朗日中值定理) 设函数 $f(x)$满足条件:

(1) 在$[a,b]$上连续;

(2) 在(a,b)内可导.

则在(a,b)内至少存在一点 ξ 使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

注意 (1) 在需要建立 $f(x)$与其导数 $f'(x)$联系时,应考虑使用拉格朗日中值定理.

(2) 在证明不等式时,应判断是否使用拉格朗日中值定理.

定理 4(柯西定理) 设函数 $f(x)$,$g(x)$满足条件:

(1) 在$[a,b]$上连续;

(2) 在(a,b)内均可导;且 $g'(x)\neq 0$.

则在(a,b)内至少存在一点 ξ 使$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

定理 5(泰勒公式) 设函数 $f(x)$在点 x_0 处的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数,则对该邻域内异于 x_0 的任意点 x,在 x_0 与 x 之间至少存在一个 ξ,使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$称为拉格朗日型余项,$R_n(x)=o((x-x_0)^n)$称为佩亚诺型余项.

(麦克劳林公式) 当 $x_0=0$ 时,有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}(\xi\text{ 在 }0\text{ 与 }x\text{ 之间}),$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

常用的五种函数的麦克劳林公式,如 e^x,$\sin x$,$\cos x$,$\ln(1+x)$,$(1+x)^m$ 的展开式如下:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\quad \theta\in(0,1),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n}),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1}),$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n),$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).$$

2. 一元函数微分的应用

(1) **函数的单调性**

① **定义** $\forall x_1,x_2\in(a,b)$，且当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加（或单调减少）.

② **判别方法** $\forall x\in(a,b)$，都有 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$），则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加（或单调减少）.

③ **用函数的单调性可以证明不等式.**

(2) **极值与最值**

① **极值的定义** 函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内异于 x_0 的任意一点，若恒有 $f(x)>f(x_0)$（$f(x)<f(x_0)$），则称 $f(x_0)$ 为 $y=f(x)$ 的极小值（或极大值）.

② **驻点** 若 $f'(x_0)=0$，则 x_0 为函数 $f(x)$ 的驻点.

③ **定理 1（极值存在的必要条件）** 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0)=0$.

④ **定理 2（极值存在的第一充分条件）** 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内可导，且 $f'(x_0)=0$（或 $f(x)$ 在 x_0 处连续，但 $f'(x_0)$ 不存在），若设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内，若：

Ⅰ $f'(x)$ 在 x_0 的附近**左正右负**，则 $f(x_0)$ 为**极大值**；

Ⅱ $f'(x)$ 在 x_0 的附近**左负右正**，则 $f(x_0)$ 为**极小值**；

Ⅲ $f'(x)$ 在 x_0 的附近**不变号**，则 $f(x_0)$ **不是极值.**

⑤ **定理 3（极值存在的第二充分条件）** 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处有 $f''(x_0)\neq 0$ 且 $f'(x_0)=0$，则：

Ⅰ 当 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值；

Ⅱ 当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值；

Ⅲ 当 $f''(x_0)=0$ 时，无法判断.

推论 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶以上的 n 阶导数，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$，则：

Ⅰ n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

Ⅱ n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；

Ⅲ n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)=0$，无法判断；

Ⅳ n 为奇数时，$f(x)$ 在 x_0 处无极值.

⑥ **最值**

若 $f(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的连续函数，则在 $[a,b]$ 函数值最大的为最大值，最小的为最小值. 这时，求最值的求法步骤为：

Ⅰ 求 $f'(x)$，求出驻点和使 $f'(x)$ 不存在的点；

Ⅱ 计算出（Ⅰ）中所得到的各点的函数值及 $f(a)$，$f(b)$；

Ⅲ 比较以上各函数值的大小，最大者为最大值，最小者为最小值.

若 $f(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上有唯一的极值点，则这个极值点为最值点.

应用问题的最值：

Ⅰ 建立目标函数(根据实际问题)；

Ⅱ 求目标函数的最值.

(3) **函数的凹凸和拐点**

① 函数的凹凸定义：设 $\forall x_1, x_2 \in I$，恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ $\left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)$，则称 $f(x)$ 在 I 上是上凸的(下凸).

② 凹凸性的判断：设 $\forall x \in I$，若 $f''(x)<0$(或 $f''(x)>0$)，则 $f(x)$ 在 I 上是上凸的(下凸).

③ 拐点：函数 $f(x)$ 的图形上上凸弧和下凸弧的分界点称为图形的拐点.

④ 拐点的求法：若在 x_0 处 $f''(x_0)=0$(或 $f''(x_0)$ 不存在)，当 x 变动经过 x_0 时，$f''(x)$ 变号，则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点；否则不是拐点.

(4) **渐近线**

① **水平渐近线**：若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$，则称 $y=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

② **铅直渐近线**：若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$，则称 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

③ **斜渐近线**：若 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$，则称 $y=ax+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

(5) **边际与弹性**

① **边际**

设函数 $y=f(x)$ 可导，称导数 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的边际函数，$f'(x)$ 在 x_0 处的函数值 $f'(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的边际函数值，即当 $x=x_0$ 时，若 x 改变一个单位，则 y 改变 $f'(x_0)$ 个单位.

在经济学中，边际成本定义为产量增加一个单位时所增加的总成本，边际收益定义为多销售一个单位产品时增加的销售总收入，等等.

$C(x)$ 表示产量为 x 单位时的总成本，$R(x)$ 表示销售 x 单位产品时的总收益，$C'(x)$ 和 $R'(x)$ 表示边际成本和边际收益，则

总利润函数 $L(x)=R(x)-C(x)$，边际利润 $L'(x)=R'(x)-C'(x)$.

② **弹性**

弹性用于定量描述一个经济变量对另一个经济变量变化的反应程度，即当一个经济变量变动百分之一时另一个经济变量变动百分之几. 设 x 和 y 是两个变量，y 对 x 的弹性记为 $\frac{Ey}{Ex}$，当 $y=y(x)$ 可导时，其计算公式为 $\frac{Ey}{Ex}=\frac{x}{y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

设某商品的需求量为 Q，价格为 P，需求函数 $Q=Q(P)$ 可导，则该商品需求对价格的弹性(需求弹性)为 $\frac{EQ}{EP}=\frac{P}{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$. 由于需求函数 $Q=Q(P)$ 一般是单调减少的，因而需求对价格的弹性常为负值.

收益对价格的弹性为$\frac{ER}{EP}=\frac{P}{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}$. 因为 $R=PQ$，于是有

$$\frac{ER}{EP}=\frac{1}{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}PQ}{\mathrm{d}P}=\frac{1}{Q}\left(Q+P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right)=1+\frac{EQ}{EP}.$$

3.3 题型总结与典型例题

1. 中值定理

题型 3-1 欲证结论：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的命题的证明

【解题思路】 此类型的命题证法有三种思路：

(1) 验证 $f^{(n-1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理条件，由该定理证得.

(2) 验证 ξ 为 $f^{(n-1)}(x)$ 的最值或极值点，用费尔马定理证明.

(3) 条件涉及某一点的高阶导数都存在时，也可用泰勒公式；在使用泰勒公式之后可能需要用介值定理.

例 3.1 设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上具有二阶导数 $f''(x)$，且 $f(2)=f(1)=0$. 如果 $F(x)=(x-1)f(x)$，证明：至少存在一点 $\xi\in(1,2)$，使 $F''(\xi)=0$.

证明 由已知 $F(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，$F(1)=F(2)=0$，所以 $F(x)$ 满足罗尔定理条件，则至少存在一点 $a\in(1,2)$，使得 $F'(a)=0$. 因为 $F'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$，则由题设知 $F'(x)$ 在 $[1,a]$ 上连续，在 $(1,a)$ 内可导，且 $F'(1)=f(1)=0=F'(a)$，故 $F'(x)$ 在 $[1,a]$ 上满足罗尔定理条件，则至少存在一点 $\xi\in(1,a)\subset(1,2)$，使 $F''(\xi)=0$.

例 3.2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导. 连接点 $A(a,f(a))$ 与点 $B(b,f(b))$ 的直线段交曲线 $f(x)$ 于 $C(c,f(c))$ 处，此处 $a<c<b$. 证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

证明 $f(x)$ 在 $[a,c]$，$[c,b]$ 上满足拉格朗日中值定理，因此，至少分别存在一点 $\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$ 使得 $f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$，$f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$，由 a,b,c 三点位于同一直线上，因此 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$，不妨设 $\xi_1<\xi_2$，在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上，$f'(x)$ 满足罗尔定理条件，故至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$.

例 3.3 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导. 又 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$，证明存在一点 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证明 有题设可知，函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，所以 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，其中 m,M 分别为 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 的最小值和最大值，于是

$$m\leqslant f(1)\leqslant M,\quad m\leqslant f(2)\leqslant M,\quad m\leqslant f(0)\leqslant M,$$

$$3m\leqslant f(0)+f(1)+f(2)\leqslant 3M,\quad \text{即 } m\leqslant\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\leqslant M.$$

由介值定理，存在点 $\eta\in[0,2]$，使得 $f(\eta)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$. 又 $f(3)=1$，可知 $f(x)$ 在 $[\eta,3]$ 上满足罗尔定理，故存在一点 $\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

例 3.4 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续可导，$x_i\in(a,b)$，$\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，且

$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f'(x_i)=f'(\xi)$.

证明　不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_{n-1}\leqslant x_n$. 若 $x_1=x_n$，则取 $\xi=x_1$，$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f'(x_i)=f'(\xi)$ 显然成立.

若 $x_1<x_n$，再设

$f'(x_1)=\min\{f'(x_1),f'(x_2),\cdots,f'(x_n)\}$，$f'(x_n)=\max\{f'(x_1),f'(x_2),\cdots,f'(x_n)\}$，则有

$$f'(x_1)=f'(x_1)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f'(x_1)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f'(x_i)$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f'(x_n)=f'(x_n)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=f'(x_n),$$

即 $f'(x_1)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f'(x_i)\leqslant f'(x_n)$. 又因为 $f'(x)$在区间(a,b)上连续，因而也在(x_1,x_n)上连续，由连续函数的介值定理，存在 $\xi\in(x_1,x_n)\subset(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f'(x_i)$. 本题去掉导函数的连续性结论也成立.

例 3.5　已知函数 $f(x)$具有二阶导数，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f(1)=0$. 证明：存在一点 $\xi\in(0,1)$使 $f''(\xi)=0$.

证明　由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，得 $f(0)=0$，$f'(0)=0$.

函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，由罗尔定理，至少存在 $x_0\in(0,1)$使 $f'(x_0)=0$.

函数 $f'(x)$在$[0,x_0]$上连续，在$(0,x_0)$内可导，且 $f'(0)=f'(x_0)=0$，由罗尔定理，至少存在 $\xi\in(0,x_0)\subset(0,1)$使 $f''(\xi)=0$.

例 3.6　设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且 $f(a)=f(b)$，$f'_+(a)f'_-(b)>0$，试证：在(a,b)内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

证明　因为 $f'_+(a)f'_-(b)>0$，所以，可设 $f'_+(a)>0$，$f'_-(b)>0$. 由于 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_+(a)>0$，所以，总存在 $c\left(a<c<\dfrac{a+b}{2}\right)$，使$\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}>0$. 又 $\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}=f'_-(b)>0$，所以，总存在 $d\left(\dfrac{a+b}{2}<d<b\right)$，使$\dfrac{f(d)-f(b)}{d-b}>0$，即 $f(c)>f(a)=f(b)>f(d)$，且$[c,d]\subset[a,b]$.

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续知，$f(x)$ 在 $[c,d]$ 上也连续，由介值定理知总存在 $x_0\in[c,d]\subset[a,b]$使 $f(x_0)=f(a)=f(b)$. 将 $f(x)$分别在$[a,x_0]$、$[x_0,b]$上用罗尔定理得：总存在 $x_1\in(a,x_0)$，$x_2\in(x_0,b)$，使 $f'(x_1)=0$，$f'(x_2)=0$，在$[x_1,x_2]$上再用罗尔定理得：总存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使 $f''(\xi)=0$.

题型 3-2　欲证结论：在(a,b)内至少存在一点 ξ 使 $f^{(n)}(\xi)=k$ 的命题的证明

【解题思路】　(1) 作辅助函数 $F(x)$；

(2) 验证 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理条件，由该定理结论证得.

构造辅助函数 $F(x)$ 的方法：(1)原函数法；(2)常数 k 值法.

1) **原函数方法**

具体步骤：(1) 将欲证结论中的 ξ 改写成 x；

(2) 将式子写成容易去掉一次导数符号的形式(即容易积分的形式)；

(3) 去掉一次导数符号(即积分一次)，移项，使等式一端为"0"，另一端即为新作的辅助函数 $F(x)$(为简便，积分常数取为 0).

例如，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $cf'(\xi)=dg'(\xi)$，其中 c,d 为常数.

因为 $cf'(\xi)=dg'(\xi)\Leftrightarrow[cf(x)]'\Big|_{x=\xi}=[dg(x)]'\Big|_{x=\xi}\Leftrightarrow[cf(x)-dg(x)]'\Big|_{x=\xi}=0$，所以可构造辅助函数 $F(x)=cf(x)-dg(x)$.

有的时候需要把待证等式进行变形，求辅助函数 $F(x)$.

例 3.7　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=0(a>0)$. 证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$.

【分析】　将欲证结论中的 ξ 改写成 x，则

$$f(\xi)=\frac{b-\xi}{a}f'(\xi)\Rightarrow f(x)=\frac{b-x}{a}f'(x)\Rightarrow\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{b-x}{a}\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{a}{b-x}\Rightarrow[\ln f(x)]'$$
$$=[-a\ln(b-x)]'\Rightarrow\ln f(x)=-a\ln(b-x)+C\Rightarrow(b-x)^a f(x)=C.$$

证明　做辅助函数 $F(x)=(b-x)^a f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$. 由罗尔定理，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $F'(\xi)=0$，即 $a(b-\xi)^{a-1}f(\xi)+(b-\xi)^a f'(\xi)=0$，约去 $(b-\xi)^{a-1}$ 得 $af(\xi)+(b-\xi)f'(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$.

例 3.8　设函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f'(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$. 试证：至少存在一点 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{3f'(\xi)}{1-2\xi}$.

【分析】　欲证结论可写为 $f''(\xi)(1-2\xi)-2f'(\xi)=f'(\xi)$.

令 $\xi=x$，则上式为

$$f''(x)(1-2x)-2f'(x)=f'(x),\quad 即[f'(x)(1-2x)]'=f'(x).$$

根据拉格朗日中值定理的推论得 $f'(x)(1-2x)=f(x)+C$. 令 $C=0$，并移项得

$$f'(x)(1-2x)-f(x)=0.$$

则令辅助函数 $F(x)=f'(x)(1-2x)-f(x)$.

证明　做辅助函数 $F(x)=f'(x)(1-2x)-f(x)$，显然 $F(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上连续，在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 内可导，且

$$F(0)=f'(0)(1-0)-f(0)=0,\quad F\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-2\cdot\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

$F(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上满足罗尔定理的条件，则至少存在一点 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，使 $F'(\xi)=0$，即

$f''(\xi)(1-2\xi)-3f'(\xi)=0$,亦即 $f''(\xi)=\dfrac{3f'(\xi)}{1-2\xi}$.

2) 常数 k 值法

此方法适用于常数部分可被分离出来的命题.构造辅助函数的步骤如下:

(1) 令常数部分为 k.

(2) 做恒等变形,使上式一端为 a 及 $f(a)$构成的代数式,另一端为 b 及 $f(b)$构成的代数式.

(3) 分析关于端点的表达式是否为对称式或轮换对称式.若是,只要把 a(或 b)改成 x,相应的函数值 $f(a)$(或 $f(b)$)改成 $f(x)$,则代换变量后的表达式就是所求的辅助函数 $F(x)$.

例 3.9 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导. 证明:在(a,b)内至少存在一点 ξ 使$\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$.

【分析】 令$\dfrac{bf(a)-af(a)}{b-a}=k\Rightarrow bf(b)-kb=af(a)-ka$ 为轮换对称式.

证明 令 $F(x)=xf(x)-kx=xf(x)-\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}x$,则

$$F(b)-F(a)=bf(b)-\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}b-af(a)+\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}a=0,$$

所以 $F(x)$在$[a,b]$上满足罗尔定理,在(a,b)内至少存在一点 ξ 使 $F'(\xi)=0$,即

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi).$$

题型 3-3 证明存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$

【解题思路】 利用导数公式 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=[f(x)g(x)]'$,找出辅助函数 $F(x)=f(x)g(x)$.

例 3.10 设函数 $f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $g'(x)\neq 0$,证明存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得$\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

证明 将待证结论改写为 $f(\xi)g'(\xi)+f'(\xi)g(\xi)-f(a)g'(\xi)-g(b)f'(\xi)=0$,即

$$[f(x)g(x)]'\Big|_{x=\xi}-[f(a)g(x)+g(b)f(x)]'\Big|_{x=\xi}=0,$$

$$\{[f(x)g(x)]-[f(a)g(x)+g(b)f(x)]\}'\Big|_{x=\xi}=0.$$

令 $F(x)=[f(x)g(x)]-[f(a)g(x)+g(b)f(x)]$,则 $F(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $F(a)=-f(a)g(b)=F(b)$,由罗尔定理,存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$,即

$$\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

题型 3-4 证明存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)=0$

【解题思路】 常将等式化为$\dfrac{f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}=\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'\Bigg|_{x=\xi}=0$,令$F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

特别地,当 $g(\xi)=\xi$ 时,$g'(\xi)=1$,可令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

注 凡遇到含导数的两个函数乘积只差时，常用上述求导公式找出辅助函数.

例 3.11 设函数 $f(x)$在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内可导，且 $f(2)=5f(0)$，证明存在 $\xi\in(0,2)$ 使得$(1+\xi^2)f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

证明 待证等式可写为$(1+x^2)f'(x)-2xf(x)=0$，即$(1+x^2)f'(x)-(1+x^2)'f(x)=0$，亦即$\dfrac{(1+x^2)f'(x)-(1+x^2)'f(x)}{(1+x^2)^2}=0$.

令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{(1+x^2)}$，则 $F(x)$在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内可导，且

$$F(0)=f(0),\quad F(2)=\frac{f(2)}{5}=f(0).$$

由罗尔定理，存在一点 $\xi\in(0,2)$，使得 $F'(\xi)=0$，即有

$$\frac{(1+\xi^2)f'(\xi)-2\xi f(\xi)}{(1+\xi^2)^2}=0,\quad 即(1+\xi^2)f'(\xi)=2\xi f(\xi).$$

题型 3-5 证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$

【解题思路】 可构造辅助函数 $F(x)=f(x)e^{g(x)}$，利用罗尔定理证明.

例 3.12 设函数 $f(x)$在$[-a,a]$上连续，在$(-a,a)$内可导，且 $f(-a)=f(a)$，$a>0$. 证明存在 $\xi\in(-a,a)$ 使得证明存在 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

证明 待证结论改写为$[f'(x)-2xf(x)]\Big|_{x=\xi}=0$.

令 $F(x)=f(x)e^{-x^2}$，则 $F(x)$在$[-a,a]$上连续，在$(-a,a)$内可导，且

$$F(-a)=f(-a)e^{-(-a)^2}=f(a)e^{-a^2}=F(a).$$

由罗尔定理，存在一点 $\xi\in(-a,a)$，使得 $F'(\xi)=0$，即有

$$f'(\xi)e^{-\xi^2}-2\xi e^{-\xi^2}f(\xi)=0\qquad 故\ f'(\xi)=2\xi f(\xi).$$

例 3.13 设奇函数 $f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；

(2) 存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

证明 (1) 由于 $f(x)$为奇函数，则 $f(0)=0$. 由于 $f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶导数，由拉格朗日定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$.

(2) 由于 $f(x)$为奇函数，则 $f'(x)$为偶函数，由(1)可知存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$，且 $f'(-\xi)=1$.

令 $\varphi(x)=e^x(f'(x)-1)$，由条件显然可知 $\varphi(x)$在$[-\xi,\xi]$上连续，在$(-\xi,\xi)$内可导，且 $\varphi(-\xi)=\varphi(\xi)=0$，由罗尔定理可知，存在 $\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$，使得 $\varphi'(\eta)=0$，即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

题型 3-6 证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$，n 为正整数

【解题思路】 可构造辅助函数 $F(x)=x^nf(x)$，利用罗尔定理证明.

例 3.14 设函数 $f(x)$在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$内可导，且 $f(a)=0$，$a>0$，证明存在 $\xi\in(0,a)$使得 $nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$(n 为正整数).

证明 令 $F(x)=x^nf(x)$，则 $F(x)$在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$内可导，且 $F(0)=F(a)=0$. 由罗尔定理，存在一点 $\xi\in(-a,a)$，使得 $F'(\xi)=0$，即有

$$n\xi^{n-1}f(\xi)+\xi^n f(\xi)=0,\quad 故\ nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$$

题型 3-7 证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

【解题思路】 由 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$ 得 $f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0$，可构造辅助函数 $F(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$，利用罗尔定理证明.

例 3.15 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$g''(x)\neq 0$，且 $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，证明：

(1) 在 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$；

(2) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

证明 (1) 反证法 假设存在 $c\in(a,b)$，使得 $g(c)=0$，对 $g(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上应用罗尔定理，存在 $\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得 $g'(\xi_1)=0$，$g'(\xi_2)=0$. 对 $g'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理，存在 $\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $g''(\xi_3)=0$. 这与条件 $g''(x)\neq 0$ 矛盾，故在 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$.

(2) 做辅助函数 $F(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0,\quad 故\ \frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

题型 3-8 欲证结论：在 (a,b) 内存在 ξ,η 且 $\xi\neq\eta$ 满足某种关系式的命题的证明

【解题思路】 两次使用拉格朗日中值定理或两次使用柯西中值定理，或一次拉格朗日中值定理、一次柯西中值定理，然后再做某种运算，证明中的辅助函数的做法不同于题型 3-5，而是利用分离变量法，使等式一端只含 ξ 的代数式，另一端只含 η 的代数式，结合原函数法稍加分析 ξ,η 的代数式，即可看出该做什么样的辅助函数.

例 3.16 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，证明存在 ξ，$\eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

【分析】 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1\Rightarrow e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}\Rightarrow[e^x f(x)]'_{x=\eta}=e^{\xi}$.

证明 (1) 令 $F(x)=e^x f(x)$，则由拉格朗日中值定理，存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $F'(\eta)=\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$，即 $e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=\dfrac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}(f(a)=f(b)=1)$.

(2) 令 $\varphi(x)=e^x$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\varphi'(\xi)=\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}=\frac{e^b-e^a}{b-a},\quad 即\ e^{\xi}=\frac{e^b-e^a}{b-a}.$$

综合(1)(2)可得 $e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}$，即 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

例 3.17 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 试证明：对于任意给定的正数 a 和 b，在开区间 $(0,1)$ 内存在不同的 ξ 和 η，使得

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b.$$

证明 取数 $\mu\in(0,1)$，由连续函数介值定理知，存在 $C\in(0,1)$，使得 $f(C)=\mu$. 在区间 $[0,C]$ 与 $[C,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，有

$$f'(\xi)=\frac{f(C)-f(0)}{C-0}=\frac{\mu}{C},\quad 0<\xi<C,$$

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(C)}{1-C}=\frac{1-\mu}{1-C},\quad C<\eta<1.$$

显然 $\xi\neq\eta$. 由于 $\mu\in(0,1)$,所以 $\mu\neq0,1-\mu\neq0$,即 $f'(\xi)\neq0,f'(\eta)\neq0$. 从而

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=\frac{a}{\frac{\mu}{C}}+\frac{b}{\frac{1-\mu}{1-C}}=\frac{aC(1-\mu)+b\mu(1-C)}{\mu(1-\mu)}=\frac{b\mu+C(a-b\mu-a\mu)}{\mu(1-\mu)}.$$

注意到,若取 $\mu=\frac{a}{a+b}$,则 $1-\mu=\frac{b}{a+b}$,并且 $\mu,1-\mu\in(0,1)$,代入上式得

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=\frac{\frac{ab}{a+b}}{\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b}}=a+b.$$

2. 不等式的证明

题型 3-9 用中值定理证明不等式

【解题思路】 该法适用于经过简单变形,不等式的一端可写成 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 或 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$,或欲证命题是区间内“至少”一点 ξ 使命题成立.

步骤:(1) 在 $[a,b]$ 上由题意做函数 $f(t),g(t)$;

(2) 写出微分中值公式 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$ 或 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$;

(3) 根据需要对 $f'(\xi),g'(\xi)$ 进行放缩.

例 3.18 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,$f(a)=f(b)$,证明存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)>0$.

证明 因为 $f(a)=f(b)$ 且 $f(x)$ 不恒为常数的函数,所以至少存在一点 $c\in(a,b)$,使得 $f(c)\neq f(a)=f(b)$.

(1) 若 $f(c)>f(a)=f(b)$,显然 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上满足拉格朗日定理的条件,则至少存在一个 $\xi\in(c,b)\subset[a,b]$,使得 $f'(\xi)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0$.

(2) 若 $f(c)<f(a)=f(b)$,显然 $f(x)$ 在 $[c,b]$ 上满足拉格朗日定理的条件,则至少存在一个 $\xi\in(c,b)\subset[a,b]$,使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}>0$.

例 3.19 证明:当 $0<a<b<\pi$ 时,$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a$.

证明 令 $F(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x$. 当 $0<a<b<\pi$ 时,由拉格朗日中值定理有

$$F(b)-F(a)=b\sin b+2\cos b+\pi b-(a\sin a+2\cos a+\pi a)=F'(\xi)(b-a).$$

而 $F'(\xi)=\xi\cos\xi-\sin\xi+\pi>0$,则 $F'(\xi)(b-a)>0$,从而有

$$b\sin b+2\cos b+\pi b-(a\sin a+2\cos a+\pi a)>0,\quad 即$$

$$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a.$$

例 3.20 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上具有 2 阶导数,$f(a)=0,f'(x)>0,f''(x)>0$. 设 $b>a$,曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b,f(b))$ 处的切线与 x 轴的交点是 $(x_0,0)$,证明 $a<x_0<b$.

证明 根据题意得点 $(b,f(b))$ 处的切线方程为 $y-f(b)=f'(b)(x-b)$.

令 $y=0$，得 $x_0=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$. 因为 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 单调递增. 又因为 $f(a)=0$，所以 $f(b)>0$. 又因为 $f'(b)>0$，所以 $x_0=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}<b$.

又因为 $x_0-a=b-a-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$，而在区间 (a,b) 中应用拉格朗日中值定理有

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\quad \xi\in(a,b),$$

所以 $x_0-a=b-a-\dfrac{f(b)}{f'(b)}=\dfrac{f(b)}{f'(\xi)}-\dfrac{f(b)}{f'(b)}=f(b)\dfrac{f'(b)-f'(\xi)}{f'(b)f'(\xi)}$.

因为 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)$ 单调递增，所以 $f'(b)>f'(\xi)$，故 $x_0-a>0$，即 $x_0>a$，所以 $a<x_0<b$，结论得证.

题型 3-10　用单调性证明不等式

【解题思路】 该方法适用于某区间上成立的不等式，对于数值不等式通常是通过辅助函数完成的.

步骤：

(1) 移项(有时需要做简单的恒等变形)，使不等式一端为 0，另一端即为所做的辅助函数；

(2) 求 $f'(x)$ 并验证 $f(x)$ 在指定区间的增减性；

(3) 求出区间端点的函数值(或极值)，作比较即得所证.

例 3.21　证明：(1) $1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\geqslant\sqrt{1+x^2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

(2) $\ln(1+x)\leqslant x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\ (x>-1)$；(3) $e^x>1+x$.

证明　(1) 设 $f(x)=1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$，则

$$f'(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+x\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

令 $f'(x)=0$，得到驻点 $x=0$. 由 $f''(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$，可知 $x=0$ 为极小值点，亦即最小值点，最小值为 $f(0)=0$，于是对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x)\geqslant 0$，即所证不等式成立.

(2) 设 $f(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x-x^2=\dfrac{-x^3}{1+x}>0$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 及 $f(0)=0$.

当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上单调增加. 当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少. 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值 $f(0)=0$，因为唯一，所以也是最大值. 所以，对于任意 $x>-1$ 有 $f(x)\leqslant 0$，即

$$f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\leqslant 0,\quad 故\ \ln(1+x)\leqslant x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3.$$

(3) 设 $x<0$,试证 $e^x>1+x$.

证法一 用中值定理

设 $f(t)=e^t-1-t$,则① $f(t)$ 在 $[x,0]$ 上连续;② $f(t)$ 在 $(x,0)$ 内可导,且 $f'(t)=e^t-1$,则存在 $\xi\in(x,0)$,使 $f'(\xi)=\dfrac{f(0)-f(x)}{0-x}$, 即 $x(e^\xi-1)=e^x-1-x$.

因为 $\xi<0$,故 $0<e^\xi<1$. 又因为 $x<0$,故 $x(e^\xi-1)>0$,从而 $e^x-1-x>0$, 即 $e^x>1+x$.

证法二 用函数的单调性

设 $f(x)=e^x-1-x$,则 $f'(x)=e^x-1$,因为 $x<0$,故 $e^x-1<0$,即 $f'(x)<0$,从而当 $x<0$ 时 $f(x)$ 是单调减少的. 又 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(e^x-1-x)=0$,所以当 $x<0$ 时,有 $f(x)>f(0)=0$, 即 $e^x-1-x>0$, 故 $e^x>1+x$.

例 3.22 设 $e<a<b<e^2$, 证明 $\ln^2b-\ln^2a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

【分析】 根据要证不等式的形式,可考虑用拉格朗日中值定理或转化为函数不等式用单调性证明.

证明 证法一 对函数 $\ln^2x$ 在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理,得

$$\ln^2b-\ln^2a=\frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a),\quad a<\xi<b.$$

设 $\varphi(t)=\dfrac{\ln t}{t}$,则 $\varphi'(t)=\dfrac{1-\ln t}{t^2}$. 当 $t>e$ 时,$\varphi'(t)<0$,所以 $\varphi(t)$ 单调减少,从而 $\varphi(\xi)>\varphi(e^2)$,即 $\dfrac{\ln\xi}{\xi}>\dfrac{\ln e^2}{e^2}=\dfrac{2}{e^2}$,故 $\ln^2b-\ln^2a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

本题也可设辅助函数为 $\varphi(x)=\ln^2x-\ln^2a-\dfrac{4}{e^2}(x-a)$,$e<a<x<e^2$ 或 $\varphi(x)=\ln^2b-\ln^2x-\dfrac{4}{e^2}(b-x)$,$e<x<b<e^2$,再用单调性进行证明即可.

证法二 设 $\varphi(x)=\ln^2x-\dfrac{4}{e^2}x$,则 $\varphi'(x)=2\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{4}{e^2}$,$\varphi''(x)=2\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. 所以,当 $x>e$ 时,$\varphi''(x)<0$,故 $\varphi'(x)$ 单调减少,从而当 $e<x<e^2$ 时,

$$\varphi'(x)>\varphi'(e^2)=\frac{4}{e^2}-\frac{4}{e^2}=0,$$

即当 $e<x<e^2$ 时,$\varphi(x)$ 单调增加. 因此当 $e<a<b<e^2$ 时,$\varphi(b)>\varphi(a)$,即

$$\ln^2b-\frac{4}{e^2}b>\ln^2a-\frac{4}{e^2}a,\text{故 }\ln^2b-\ln^2a>\frac{4}{e^2}(b-a).$$

例 3.23 证明:当 $x>0$ 时,$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$.

证明 只需证 $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}>\ln(1+x)$. 令 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}-\ln(1+x)\ (x\geqslant0)$,则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导,且当 $x>0$ 时

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\dfrac{x}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}-\frac{1}{1+x}=\frac{2+x-2\sqrt{1+x}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加;当 $x>0$ 时,$f(x)>f(0)=0$.

例 3.24 证明：当 $0<a<b<\pi$ 时，$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a$.

【分析】 本题与例 3.19 是同一题目，这里利用"参数变易法"构造辅助函数，再利用函数的单调性证明.

证明 令 $f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x-a\sin a-2\cos a-\pi a$，$0<a\leqslant x\leqslant b<\pi$，则

$f'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x+\pi=x\cos x-\sin x+\pi$，且 $f'(\pi)=0$.

又 $f''(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0$，$(0<x<\pi$ 时，$\sin x>0)$，故当 $0<a\leqslant x\leqslant b<\pi$ 时，$f'(x)$ 单调减少，即 $f'(x)>f'(\pi)=0$，则 $f(x)$ 单调增加，于是 $f(b)>f(a)=0$，即 $b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a$.

题型 3-11 用泰勒公式证明不等式

【解题思路】 该法适用于题设中函数 $f(x)$ 具有二阶和二阶以上可导，且最高阶导数的大小或上下界可知的命题.

步骤：(1) 写出比最高阶导数低一阶的函数的泰勒展开；

(2) 恰当选择等式两边的 x 或 x_0；

(3) 根据所给的最高阶导数的大小或界对展开式进行放缩.

例 3.25 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 且 $f''(x)>0$，证明 $f(x)>x$.

证明 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 可知，$f(0)=0$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$.

因为 $f(x)$ 二阶可导，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处展成一阶泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{x^2}{2}f''(\xi),\quad \xi\text{ 介于 }0\text{ 与 }x\text{ 之间}.$$

由于 $f''(x)>0$，所以 $f''(\xi)>0$，于是有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{x^2}{2}f''(\xi)>f(0)+f'(0)x=x,\quad \text{即 } f(x)>x.$$

例 3.26 已知函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $f(x)>0$，$f(0)=1$，$f'(0)=1$，$f(x)f''(x)-(f'(x))^2>0$. 证明：$f(x)\geqslant e^x$.

证明 令 $g(x)=\ln f(x)$，则 $g(0)=0$，且

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)},\quad g'(0)=1;\quad g''(x)=\frac{f(x)f''(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}>0.$$

所以 $g(x)=g(0)+g'(0)x+\dfrac{g''(\xi)}{2}x^2=x+\dfrac{g''(\xi)}{2}x^2\geqslant x$，从而 $f(x)\geqslant e^x$.

例 3.27 设 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上具有二阶导数，且 $|f(x)|\leqslant M_0$，$0<|f''(x)|\leqslant M_2$，$(a\leqslant x<+\infty)$. 证明 $|f'(x)|\leqslant2\sqrt{M_0M_2}$.

证明 对任意的 $x\in[a,+\infty)$ 及任意的 $h>0$，有 $x+h\in(a,+\infty)$，于是

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(\xi)h^2,\quad \text{其中 }\xi\in[h,x+h],$$

即 $f'(x)=\dfrac{1}{h}[f(x+h)-f(x)]-\dfrac{h}{2}f''(\xi)$，故

$$|f'(x)|\leqslant\frac{2M_0}{h}+\frac{h}{2}M_2,\quad x\in[a,+\infty),h>0.$$

令 $g(h)=\dfrac{2M_0}{h}+\dfrac{h}{2}M_2$，试求其最小值. 取 $g'(h)=-\dfrac{2M_0}{h^2}+\dfrac{1}{2}M_2=0$，得到 $h_0=2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}$，

而 $g''(h)=\dfrac{4M_0}{h^3}>0$，所以，$g(h)$ 在 $h_0=2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}$ 处得极小值，亦即最小值. 而 $g(h_0)=2\sqrt{M_0M_2}$，故

$$|f'(x)|\leqslant 2\sqrt{M_0M_2},\quad x\in[a,+\infty).$$

题型 3-12　利用函数的凸性证明不等式

【解题思路】 若 $F(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，x_1,x_2 为 (a,b) 内任意两点.

(1) 若 $F''(x)>0,x\in(a,b)$，则 $F(x)$ 在 (a,b) 内为下凸函数，即

$$F\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{F(x_1)+F(x_2)}{2},$$

或 $F(px_1+qx_2)<pF(x_1)+qF(x_2)$，其中 $p+q=1,p>0,q>0$.

(2) 若 $F''(x)<0,x\in(a,b)$，则 $F(x)$ 在 (a,b) 内为上凸函数，即

$$F\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{F(x_1)+F(x_2)}{2},$$

或 $F(px_1+qx_2)>pF(x_1)+qF(x_2)$，其中 $p+q=1,p>0,q>0$.

例 3.28　证明：$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}(x>0,y>0,x\neq y)$.

证明　设 $f(u)=u\ln u$，则 $f'(u)=\ln u+1,f''(u)=\dfrac{1}{u}>0(u>0)$，故函数 $f(u)=u\ln u$ 在 $(0,+\infty)$ 上是下凸的. 任取 $x,y\in(0,+\infty),x\neq y$，有 $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)<\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$，所以

$$\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}<\frac{x\ln x+y\ln y}{2},$$

即 $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}(x>0,y>0,x\neq y)$.

例 3.29　设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在 $[0,1]$ 上(　　).

A. 当 $f'(x)\geqslant0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$　　B. 当 $f'(x)\geqslant0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$

C. 当 $f''(x)\geqslant0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$　　D. 当 $f''(x)\geqslant0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$

【分析】 此题考查的曲线的凹凸性的定义及判断方法.

解　显然 $g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$ 就是连接 $(0,f(0)),(1,f(1))$ 两点的直线方程. 故当 $f''(x)\geqslant0$ 时，曲线是下凸的，也就有 $f(x)\leqslant\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}x+f(0)$，即

$$f(x)\leqslant f(0)(1-x)+f(1)x=g(x),$$

也就是 $f(x)\leqslant g(x)$，应该选 D.

3. 导数的应用

题型 3-13　函数单调性的判别法、极值的求法

1) 求函数的单调区间

【解题思路】 函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y'=f'(x)$ 保持不变号的区间称为单调区间，因而求可导函数的单调区间就是求导函数的正负区间，而相邻的两个单调区间的分界点就是极值点，求单调区间的步骤：

(1) 写出 $y=f(x)$的定义域;
(2) 求出 $y'=f'(x)$;
(3) 解方程 $f'(x)=0$ 求出驻点,并找出不可导的点;
(4) 用驻点和不可导的点将 $f(x)$的定义域分成若干个区间;
(5) 在每个子区间上确定导数 $f'(x)$的符号及 $f(x)$的单调性.
2) 求函数的极值
【解题思路及步骤】
(1) 写出 $y=f(x)$的定义域;
(2) 求出 $y'=f'(x)$,解方程 $f'(x)=0$ 求出驻点,并找出不可导的点;
(3) 利用第一充分条件判断驻点和不可导的点是否为极值点;
(4) 求出 $f(x)$的极值.

例 3.30 判断题
(1) 若 $f(x_1)$为函数 $f(x)$的极小值,$f(x_2)$为 $f(x)$的极大值,则必有 $f(x_1)<f(x_2)$;
(2) 若 x_0 是函数 $f(x)$的极值点,则 $f'(x_0)=0$.

解 (1) 错,因为极大值有可能小于极小值,极值是局部的;
(2) 错,因为导数不存在的点也有可能是极值点.

例 3.31 (1) 讨论函数 $y=\sqrt{3}\arctan x-2\arctan\dfrac{x}{\sqrt{3}}$的单调性,并求其极值.

(2) 设 $y=x^3+ax^2+bx+c$ 在 $x=1,x=2$ 处取得极值,求 a,b 的值,并判断 $y(1),y(2)$是极大值还是极小值.

解 (1) 因为 $y'=\sqrt{3}\dfrac{1}{1+x^2}-2\dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}(1-x^2)}{(1+x^2)(3+x^2)}$,所以驻点为 $x=\pm1$,

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	减少	极小值	增加	极大值	减少

极小值为 $y(-1)=-\dfrac{\sqrt{3}\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}$,极大值为 $y(1)=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{4}-\dfrac{\pi}{3}$.

(2) 因为 $y'=3x^2+2ax+b$,依题意得 $3+2a+b=0,12+4a+b=0$.

联立解之,得 $a=-\dfrac{9}{2},b=6$. 又 $y''=6x+2a=6x-9,y''(1)=-3<0,y''(2)=3>0$,所以 $y(1)$为极大值,$y(2)$为极小值.

例 3.32 设函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上可导,且 $f(0)=0,f'(x)$单调增加. 证明$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上单调增加.

证明 $$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{xf'(x)-(f(x)-f(0))}{x^2}=\frac{xf'(x)-xf'(\xi)}{x^2}$$
$$=\frac{x(f'(x)-f'(\xi))}{x^2}>0,\xi\text{ 在 } 0 \text{ 和 } x \text{ 之间},$$

所以$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上单调增加.

例 3.33 设函数 $f(x)$是可导函数，且满足 $f(x)f'(x)>0$，则(　　).

A. $f(1)>f(-1)$　　　　B. $f(1)<f(-1)$

C. $|f(1)|>|f(-1)|$　　　　D. $|f(1)|<|f(-1)|$

解 设 $g(x)=(f(x))^2$，则 $g'(x)=2f(x)f'(x)>0$，也就是$(f(x))^2$ 是单调增加函数. 也就得到$(f(1))^2>(f(-1))^2\Rightarrow|f(1)|>|f(-1)|$，所以应该选 C.

例 3.34 设函数 $y=f(x)$由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f(x)$的极值.

解 在方程两边同时对 x 求导一次，得到

$$(3y^2+2xy+x^2)y'+(y^2+2xy)=0, \tag{1}$$

即$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-y^2-2xy}{3y^2+2xy+x^2}$. 令$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ 及 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$，得到函数唯一驻点 $x=1,y=-2$.

在(1)式两边同时对 x 求导一次，得到

$$(6yy'+4y+2xy'+4x)y'+(3y^2+2xy+x^2)y''+2y=0.$$

把 $x=1,y=-2,y'(1)=0$ 代入，得到 $y''(1)=\dfrac{4}{9}>0$，所以函数 $y=f(x)$在 $x=1$ 处取得极小值 $y=-2$.

3) 曲线的凸性及拐点

题型 3-14　凸性及拐点的判定

【解题思路】 根据二阶导数的符号判定曲线的凸性及求拐点

判别方法一 设函数 $f(x)$在 x_0 的某一邻域内二阶可导，且 $f''(x_0)=0$ 且在 x_0 的左右两侧 $f''(x)$异号，则$(x_0,f(x_0))$为曲线 $y=f(x)$的拐点；若在 x_0 的左右两侧 $f''(x)$同号，则$(x_0,f(x_0))$不是曲线 $y=f(x)$的拐点.

判别方法二 设函数 $f(x)$在 x_0 的某一邻域内二阶可导，若 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq0$，则$(x_0,f(x_0))$为曲线 $y=f(x)$的拐点.

一般地，若函数 $f(x)$在 x_0 处具有二阶以上的 n 阶导数，且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)\neq0,$$

则当 n 为奇数时，$(x_0,f(x_0))$为曲线 $y=f(x)$的拐点.

判别方法三 设函数 $f(x)$在 x_0 处连续，$f''(x_0)$不存在，若在 x_0 的左右两侧 $f''(x)$异号，则$(x_0,f(x_0))$为曲线 $y=f(x)$的拐点；若在 x_0 的左右两侧 $f''(x)$同号，则$(x_0,f(x_0))$不是曲线 $y=f(x)$的拐点.

曲线的拐点只可能在二阶导数为零的点和二阶导数不存在的点处出现.

例 3.35 判断题

(1) 若$(x_0,f(x_0))$为曲线 $y=f(x)$的拐点，则 $f''(x_0)=0$.

(2) 若 $f''(x_0)=0$，则$(x_0,f(x_0))$必为 $y=f(x)$的拐点.

解 (1) 错，在拐点的横坐标处，函数的二阶导数可能不存在.

(2) 错，$f''(x_0)=0$，$(x_0,f(x_0))$可能不是 $y=f(x)$的拐点.

例 3.36 若 $f(x)$二阶可导，且 $f(-x)=-f(x)$，$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，则在$(-\infty,0)$内曲线 $y=f(x)$(　　).

A. 单调下降,曲线是下凸的　　B. 单调下降,曲线是上凸的

C. 单调上升,曲线是下凸的　　D. 单调上升,曲线是上凸的

解 因为 $f(-x)=-f(x)$,所以 $f(x)$为奇函数,$f'(x)$为偶函数,$f''(x)$为奇函数,则当 $x\in(0,+\infty)$时,$f'(-x)=f'(x)>0$,$f''(-x)=-f''(x)<0$,从而 $x\in(-\infty,0)$时,$f'(x)>0$,$f''(x)<0$,在$(-\infty,0)$内,曲线 $y=f(x)$单调增加,上凸. 故选 D.

例 3.37 求函数 $y=(x-1)\sqrt[3]{x^5}$的凹凸区间及拐点.

解 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,$y'=\dfrac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}-\dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$,$y''=\dfrac{10}{9}\dfrac{4x-1}{\sqrt[3]{x}}$.

令 $y''=0$ 得 $x=\dfrac{1}{4}$,而 $x=0$ 在 y''处不存在.

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$
y''	$+$	不存在	$-$	0	$+$
y	凹	拐点	凸	拐点	凹

因为 $y(0)=0$,$y\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{3}{16\sqrt[3]{16}}$,所以拐点为$(0,0)$和$\left(\dfrac{1}{4},-\dfrac{3}{16\sqrt[3]{16}}\right)$.

例 3.38 设 $f(x)=|x(1-x)|$,则(　　).

A. $x=0$ 是 $f(x)$的极值点,但$(0,0)$不是曲线 $y=f(x)$的拐点

B. $x=0$ 不是 $f(x)$的极值点,但$(0,0)$是曲线 $y=f(x)$的拐点

C. $x=0$ 是 $f(x)$的极值点,且$(0,0)$是曲线 $y=f(x)$的拐点

D. $x=0$ 不是 $f(x)$的极值点,$(0,0)$也不是曲线 $y=f(x)$的拐点

【分析】 由于 $f(x)$在 $x=0$ 处的一、二阶导数不存在,可利用定义判断极值情况,考查 $f(x)$在 $x=0$ 的左、右两侧的二阶导数的符号,判断拐点情况.

解 设 $0<\delta<1$,当 $x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$时,$f(x)>0$,而 $f(0)=0$,所以 $x=0$ 是 $f(x)$的极小值点.

显然,$x=0$ 是 $f(x)$的不可导点. 当 $x\in(-\delta,0)$时,$f(x)=-x(1-x)$,$f''(x)=2>0$,当 $x\in(0,\delta)$时,$f(x)=x(1-x)$,$f''(x)=-2<0$,所以$(0,0)$是曲线 $y=f(x)$的拐点. 故选 C.

注 对于极值情况,也可考查 $f(x)$在 $x=0$ 的某去心邻域内的一阶导数的符号来判断.

例 3.39 设函数 $f(x)$满足关系 $f''(x)=x-(f'(x))^2$,且 $f'(0)=0$,证明:点$(0,f(0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

证明 由关系式,令 $x=0$,得 $f''(0)=0$. 等式两端求导,得 $f'''(x)=1-2f'(x)f''(x)$,因此 $f'''(0)=1$.

再由 $f'''(x)$的连续性可知,在 $x=0$ 附近,$f'''(x)>0$,所以 $f''(x)$单增,$f''(x)$在 $x=0$ 的两侧异号,点$(0,f(0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

例 3.40 设函数 $y=y(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导,且满足 $y'=x^2+y^2$,$y(0)=0$.

(1) 研究 $y(x)$在区间$(0,+\infty)$的单调性和曲线 $y=y(x)$的凹凸性;

(2) 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)}{x^3}$.

解 (1) 当 $x>0$ 时，有 $y'=x^2+y^2>0$，故 $y(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调增加. 从而当 $x>0$ 时，$y'=x^2+y^2$ 也单调增加. 可见，曲线 $y=y(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 向下凸.

或当 $x>0$ 时，可得 $y''=2x+2y\cdot y'=2x+2y(x^2+y^2)>0$. 可见，曲线 $y=y(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 向下凸.

(2) 由题设知，$y(0)=y'(0)=0$. 应用洛必达法则有

$$\lim_{x\to0}\frac{y(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{y'(x)}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+y^2}{3x^2}=\frac{1}{3}+\lim_{x\to0}\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}[y'(0)]^2=\frac{1}{3}.$$

4) 曲线的渐近线

题型 3-15 求渐近线

【解题思路】 求渐近线就是按定义求极限，渐近线分为水平渐近线、垂直渐近线和斜渐近线.

水平渐近线：若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$，则 $y=b$ 称为函数 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

铅直渐近线：若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 称为函数 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

斜渐近线：若 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$，则 $y=ax+b$ 称为函数 $y=f(x)$ 的斜渐近线. 学习渐近线应注意函数的图形不一定有渐近线.

例 3.41 讨论函数 $y=\ln\left(3-\frac{e}{x}\right)$ 的单调性、凹凸性，并求极值与拐点及渐近线方程.

解 函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup\left(\frac{e}{3},+\infty\right)$. $y'=\frac{1}{3-\frac{e}{x}}\cdot\frac{e}{x^2}=\frac{e}{x(3x-e)}>0$，故 $y=\ln\left(3-\frac{e}{x}\right)$ 在定义域内没有驻点，也没有导数不存在的点. 取 $y''=-\frac{e(6x-e)}{x^2(3x-e)^2}=0$，得 $x=\frac{e}{6}$，而 $\frac{e}{6}$ 不在 $y=\ln\left(3-\frac{e}{x}\right)$ 的定义域内.

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$y''<0$，故 $y=\ln\left(3-\frac{e}{x}\right)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单增上凸；当 $x\in\left(\frac{e}{3},+\infty\right)$ 时，$y''>0$，故 $y=\ln\left(3-\frac{e}{x}\right)$ 在 $\left(\frac{e}{3},+\infty\right)$ 上单增下凸。

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(3-\frac{e}{x}\right)=\ln3$，$\lim\limits_{x\to0^-}\ln\left(3-\frac{e}{x}\right)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to\left(\frac{e}{3}\right)^+}\ln\left(3-\frac{e}{x}\right)=-\infty$，故曲线 $y=\ln\left(3-\frac{e}{x}\right)$ 水平渐近线为 $y=\ln3$，铅直渐近线为 $x=0$ 和 $x=\frac{e}{3}$.

例 3.42 求曲线 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2-1}=1$，故 $y=1$ 为水平渐近线；$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$，故 $x=1$ 为铅直渐近线. 没有斜渐近线.

例 3.43 下列曲线有渐近线的是(　　).

A. $y=x+\sin x$　　B. $y=x^2+\sin x$

C. $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$　　D. $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$

解 A. 因为$\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x)=\infty$,所以 $y=x+\sin x$ 没有水平渐近线;因为不存在 x_0,使得$\lim\limits_{x\to x_0}(x+\sin x)=\infty$,所以 $y=x+\sin x$ 没有铅直渐近线;因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=1$,$\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x-x)$不存在.所以 $y=x+\sin x$ 没有斜渐近线.

B. 类似讨论 $y=x^2+\sin x$ 没有渐近线.

C. $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$没有水平渐近线和铅直渐近线.因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin\dfrac{1}{x}}{x}=1$,$\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sin\dfrac{1}{x}-x\right)=0$,所以 $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$有斜渐近线 $y=x$.

D. $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$没有渐近线.

故选 C.

5) 方程根的存在与界定

题型 3-16 关于方程 $f(x)=0$ 的根(或 $f(x)$的零点)的存在性的讨论

【解题思路】 一般用零点存在定理或罗尔定理证明

例 3.44 不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$的导数,说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根,并指出它们所在的区间.

解 因 $f(1)=f(2)=0$,根据罗尔定理知:存在 $\xi_1\in(1,2)$,使得 $f'(\xi_1)=0$;同理,因 $f(2)=f(3)=0$,根据罗尔定理知:存在 $\xi_2\in(2,3)$,使得 $f'(\xi_2)=0$.

又由于 $f'(x)$是二次函数,最多只有两个不相等的实根,故 $f'(x)=0$ 的两个实根分别为 $\xi_1\in(1,2)$,$\xi_2\in(2,3)$.

例 3.45 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为满足 $a_1-\dfrac{a_2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{a_n}{2n-1}=0$ 的实数,试证明方程 $a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$,在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内至少存在一个实根.

证明 作辅助函数 $f(x)=a_1\sin x+\dfrac{1}{3}a_2\sin 3x+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}a_n\sin(2n-1)x$.

显然 $f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上连续,在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内可导,且 $f(0)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$,故由罗尔定理知,至少存在一点 $\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$使 $f'(\xi)=0$.即

$$f'(\xi)=a_1\cos\xi+a_2\cos 3\xi+\cdots+a_n\cos(2n-1)\xi=0,$$

从而题设方程在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内至少有一个实根.

例 3.46 设正整数 $n>1$,证明方程 $x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\cdots+a_{2n-1}x-1=0$ 至少有两个实根.

证明 设 $f(x)=x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\cdots+a_{2n-1}x-1$，则其在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(0)=-1$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$. 因而，必存在 $x_1>0$，使得 $f(x_1)>0$. 由连续函数的零点定理可知，至少有一点 $\xi_1\in(0,x_1)$，使得 $f(\xi_1)=0$.

同理，必存在 $x_2<0$，使得 $f(x_2)>0$. 由连续函数的介值定理可知，至少有一点 $\xi_2\in(x_2,0)$，使得 $f(\xi_2)=0$.

综上可知，方程 $x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\cdots+a_{2n-1}x-1=0$ 至少有两个实根.

题型 3-17　方程 $f(x)=0$ 的根的个数的讨论

【解题思路】 (1) 求出 $f(x)$ 的驻点或导数不存在的点，确定 $f(x)$ 的单调增减性区间；

(2) 求出单调区间和极值(或最值)；

(3) 分析极值(或最值)与 x 轴的相对位置.

例 3.47　试讨论方程 $xe^{-x}=a(a>0)$ 的实根.

解　令 $F(x)=xe^{-x}-a$，则方程 $xe^{-x}=a$ 实根的个数就是 $F(x)$ 的零点的个数. 令

$$F'(x)=(1-x)e^{-x}=0\Rightarrow x=1.$$

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$F'(x)$	$+$	0	$-$
$F(x)$	$\uparrow$	$(e^{-1}-a)$极大值	$\downarrow$

$x=1$ 是 $F(x)$ 的唯一驻点，$F(1)=e^{-1}-a$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的极大值，因此也是最大值.

以下就 $F(1)=e^{-1}-a$ 与 x 轴的相对位置讨论 $F(x)$ 的零点.

(1) 若 $F(1)=e^{-1}-a<0$，$F(x)=xe^{-x}-a$ 与 x 轴不会有交点，因此 $F(x)$ 没有零点.

(2) 若 $F(1)=e^{-1}-a=0$，$(1,e^{-1}-a)$ 位于 x 轴上，$F(x)=xe^{-x}-a$ 与 x 轴只有一个交点 $(1,e^{-1}-a)$，因此 $F(x)$ 有唯一的零点.

(3) $F(1)=e^{-1}-a>0$，$(1,e^{-1}-a)$ 位于 x 轴上方，$F(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调增加，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^{-x}-a)=-\infty$，由此可知 $F(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内有且仅有唯一的零点；$F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调减少，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^{-x}-a)=-a<0$，由此可知 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内有且仅有唯一的零点. 因此 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有且仅有两个零点.

综上所述，当 $F(1)=e^{-1}-a<0$，即 $e^{-1}<a$ 时，方程没有实根；

当 $F(1)=e^{-1}-a=0$，即 $e^{-1}=a$ 时，方程有唯一实根；

当 $F(1)=e^{-1}-a>0$，即 $e^{-1}>a$ 时，方程有两个实根.

例 3.48　讨论方程 $\ln x=ax$(其中 $a>0$)有几个实根？

解　设 $f(x)=\ln x-ax$，$x\in(0,+\infty)$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-a$，故 $x=\dfrac{1}{a}$ 为 $f(x)$ 的驻点.

当 $x<\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$. 所以 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)$ 为最大值.

当 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)>0$，即 $-\ln a-1>0$，亦即 $0<a<\dfrac{1}{e}$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$，所以当 $0<a<\dfrac{1}{e}$ 时，方程有两个根.

当 $f\left(\frac{1}{a}\right)=0$,即 $a=\frac{1}{e}$时,方程有一个根.

当 $f\left(\frac{1}{a}\right)<0$,即 $a>\frac{1}{e}$时,方程无根.

例 3.49 对 k 的不同取值,分别讨论方程 $x^3-3kx^2+1=0$ 在区间$(0,+\infty)$内根的个数.

解 设 $f(x)=x^3-3kx^2+1, 0\leqslant x<+\infty$,则 $f'(x)=3x(x-2k)$.

(1) 当 $k\leqslant 0$ 时,$f'(x)>0$,即 $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调增加. 又 $f(0)=1$,故原方程在区间$(0,+\infty)$内无根;

(2) 当 $k>0$ 时:若 $0<x<2k$,则 $f'(x)<0$, $f(x)$单调减少;若 $2k<x$,则 $f'(x)>0$, $f(x)$单调增加. 所以 $x=2k$ 是 $f(x)$的极小值点,极小值 $f(2k)=1-4k^3$,于是:

当 $1-4k^3>0$,即 $0<k<\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$时,原方程在区间$(0,+\infty)$内无根;

当 $1-4k^3=0$,即 $k=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$时,原方程在区间$(0,+\infty)$内有唯一的根;

当 $1-4k^3<0$,即 $k>\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$时,原方程在区间$(0,+\infty)$内有两个根.

例 3.50 设方程 $x^4+ax+b=0$.

(1) 当常数 a,b 满足何种关系时,方程有唯一实根?

(2) 当常数 a,b 满足何种关系时,方程无实根.

解 设 $y=x^4+ax+b, -\infty<x<+\infty$,求导得 $y'=4x^3+a$.

令 $y'=0$ 得唯一驻点 $x=\sqrt[3]{-\frac{a}{4}}$. 又 $y''=12x^2\geqslant 0$,故当 $x=\sqrt[3]{-\frac{a}{4}}$时,y 有最小值,且最小值为 $y\Big|_{x=\sqrt[3]{-\frac{a}{4}}}=\left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{4}{3}}+a\left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{1}{3}}+b$.

又当 $x\to-\infty$时,$y\to+\infty$;$x\to+\infty$时,$y\to+\infty$,因此:

(1) 当且仅当$\left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{4}{3}}+a\left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{1}{3}}+b=0$ 时,方程有唯一实根;

(2) 当$\left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{4}{3}}+a\left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{1}{3}}+b>0$ 时,方程无实根.

题型 3-18 方程 $f(x)=0$ 的根的唯一性的研究

【解题思路】 (1) 利用零值定理(或罗尔定理)证明 $f(x)=0$ 至少存在一个根;(2)利用函数的单调性证明 $f(x)=0$ 最多只有一个根;或用反证法证明,这时主要利用罗尔定理或拉格朗日中值定理.

例 3.51 设函数 $f(x)$在闭区间上可微,对于$[0,1]$上的每一个 x,函数值 $f(x)$在开区间$(0,1)$内,且 $f'(x)\neq 1$,证明,在$(0,1)$内有且仅有一个 x,使 $f(x)=x$.

证明 令 $F(x)=f(x)-x$,则 $F(x)$在$[0,1]$上连续.

由题设知 $0<f(x)<1$,所以 $F(0)=f(0)-0>0, F(1)=f(1)-1<0$,故由零点定理知,在$(0,1)$内至少存在一点 x,使 $F(x)=f(x)-x=0$,即 $f(x)=x$.

再设有两个 $x_1,x_2\in(0,1), x_1\neq x_2$,使 $F(x_1)=0, F(x_2)=0$. 根据罗尔定理,$\exists\xi\in(0,1)$使 $F'(\xi)=f'(\xi)-1=0$. 这与 $f'(x)\neq 1$ 矛盾. 故方程有唯一根.

6）洛必达法则

（1）学习洛必达法则应注意的问题

① 洛必达法则仅仅用于$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式；

② 如果$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$不存在（不包括∞），不能断言$\lim\frac{f(x)}{g(x)}$不存在，只能说明洛必达法则在此失效，应采用其他方法求极限，但不能说此未定式的极限不存在.

③ $0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty,\infty^0$ 也叫未定型，必须转化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型之后，再用洛必达法则求极限：思路为

$0\cdot\infty$型转化为$\frac{1}{\infty}\cdot\infty$或$0\cdot\frac{1}{0}$型；

$\infty-\infty$可通分转化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型；

0^0 型转化为 $e^{\ln 0^0}=e^{0\cdot\ln 0}$，其中指数是 $0\cdot\infty$型；

1^∞型转化为 $e^{\ln 1^\infty}=e^{\infty\cdot\ln 1}$，其中指数是$\infty\cdot 0$；

∞^0 型转化为 $e^{\ln\infty^0}=e^{0\ln\infty}$，其中指数是 $0\cdot\infty$型.

④ 洛必达法则求极限与其他方法求极限在同一题中可交替使用；

⑤ 有时要连续用几次洛必达法则，每一次都要验证是否是$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型.

⑥ 应注意洛必达法则不是求 0/0 型或与∞/∞型未定式的唯一方法.读者在计算时应该结合使用等价无穷小的替换、带有佩亚诺余项的泰勒公式等方法，以使计算简便、准确.

（2）如果数列极限也属于未定式的极限问题，需先将其转换为函数极限，然后使用洛必达法则，从而求出数列极限.

题型 3-19　利用洛必达法则求极限

例 3.52　求下列各式的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)$；　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$.

解　（1）解法一　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$（洛必达法则）

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\sqrt{1-x^2}}$（通分）

$=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}}$（分子等价无穷小代换）

$=-\frac{1}{6}$.

注　对$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$型未定式，只要满足洛必达法则的条件，可直接运用法则来求.

解法二 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{6}x^3}{x^3}=-\dfrac{1}{6}\quad\left(x-\arcsin x\sim-\dfrac{1}{6}x^3\right).$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\cot x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x}=0.$$

注 对 $0\cdot\infty$,$\infty-\infty$型未定式,先化为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型,再利用洛必达法则来求.

(4) 对原式应用洛必达法则

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)-(1+x)}{4x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{1}{4}.$$

例 3.53 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

【错解】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=0.$

【分析】 先通分化为“$\dfrac{0}{0}$”型极限,再利用等价无穷小与洛必达法则求解即可,而不是想当然的猜一个结果.本题属于求未定式极限的基本题型,对于“$\dfrac{0}{0}$”型极限,应充分利用等价无穷小替换来简化计算.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\dfrac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\dfrac{1}{2}\sin 4x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2}(4x)^2}{6x^2}=\frac{4}{3}.$$

例 3.54 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$.

解 所求极限属于$\dfrac{0}{0}$的未定式.但分子分母分别求导数后,将化为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}}{\cos x}$,此式振荡无极限,故洛必达法则失效,不能使用.但原极限是存在的,可用下法求得:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}=\frac{0}{1}=0.$$

例 3.55 已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$，$a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

(1) 求 a 的值； (2) 若 $x\to 0$ 时，$f(x)-a$ 是 x^k 的同阶无穷小，求 k.

解 (1) $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$.

(2) 当 $x\to 0$ 时，$f(x)-a=f(x)-1=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}$.

而当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x$ 与 $\dfrac{1}{6}x^3$ 等价，故 $f(x)-a\sim\dfrac{1}{6}x$，即 $k=1$.

例 3.56 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}(1-e^{2-2\cos x-x^2})}{x^4}\text{（提出非零因子）}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2-2\cos x-x^2}}{x^4}\text{（非零因子单独求出极限}\lim_{x\to 0}e^{x^2}=1\text{）}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(2-2\cos x-x^2)}{x^4}\text{（等价无穷小代换）}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\cos x-2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}\text{（洛必达法则）}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{2x^3}=\frac{1}{12}.\text{（等价无穷小代换）}$$

例 3.57 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$.

解 对 1^∞，0^0，∞^0 型未定式，通过取对数，先化为 $0\cdot\infty$ 型，再化为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，利用洛必达法则来求.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln\ln(1+x)-\ln x}{x^2-1}}\text{（利用指数函数的连续性极限号可以穿过函数符号）}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\ln(1+x)-\ln x}{x^2-1}}\left(\frac{0}{0}\text{ 型洛必达法则}\right)$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)\ln(1+x)}-\frac{1}{x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{2x^2\ln(1+x)}\frac{1}{1+x}}.$$

将非零极限因子适时地分离并计算出来 $\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x}=1\right)$，并进行等价无穷小代换，有

$$\text{上式}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{2x^3}}\text{（洛必达法则）}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{6x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{6x^2}}=0.$$

7) 最值及其经济意义

题型 3-20 函数最值的求法

【解题思路】 (1) 求最大值最小值的步骤为：首先求出定义域；然后求出 $f'(x)$，求出可疑极值点；最后比较可疑极值点的函数值与边界处的函数值.（可疑极值点为驻点和导数

不存在的点)

(2) 求具体问题最值的步骤

① 分析问题,明确求哪个量的最值.

② 写出函数关系式.确定函数关系常常要用几何、物理、化学、经济学等方面的知识,函数关系式列出后,依具体情况要写出定义域.

③ 由函数式求驻点,并判断是否为极值点.

④ 根据具体问题,判别该极值点是否为最值点.一般如果函数在$[a,b]$连续,且只求得唯一的极值点,则这个极值点就是所求的最值点.

⑤ 最后写出最值.

注意不要将极大(极小)值与最大(最小)值混为一谈,要懂得它们的区别和联系.

例 3.58 求 $y=2x^3-6x^2-18x+7$ 在$[1,4]$上的最大值与最小值.

解 令 $y'=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)=0$,得驻点 $x=-1,x=3$,且 $y(-1)=17$,$y(3)=-47$,而 $y(1)=-15$,$y(4)=-33$,故最大值为 $y(-1)=17$,最小值为 $y(3)=-47$.

例 3.59 设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$.

(1) 求 $f(x)$的最小值;

(2) 设数列$\{x_n\}$满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$,证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求此极限.

解 (1) $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$,令 $f'(x)=0$,得唯一驻点 $x=1$.

当 $x\in(0,1)$时,$f'(x)<0$,函数单调递减;当 $x\in(1,\infty)$时,$f'(x)>0$,函数单调递增.所以函数在 $x=1$ 处取得最小值 $f(1)=1$.

(2) 由于 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$,但 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_n}\geqslant 1$,所以$\dfrac{1}{x_{n+1}}<\dfrac{1}{x_n}$,故数列$\{x_n\}$单调递增.又由于$\ln x_n\leqslant \ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$,得到 $0<x_n<\mathrm{e}$,故数列$\{x_n\}$有界.由单调有界收敛定理可知极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

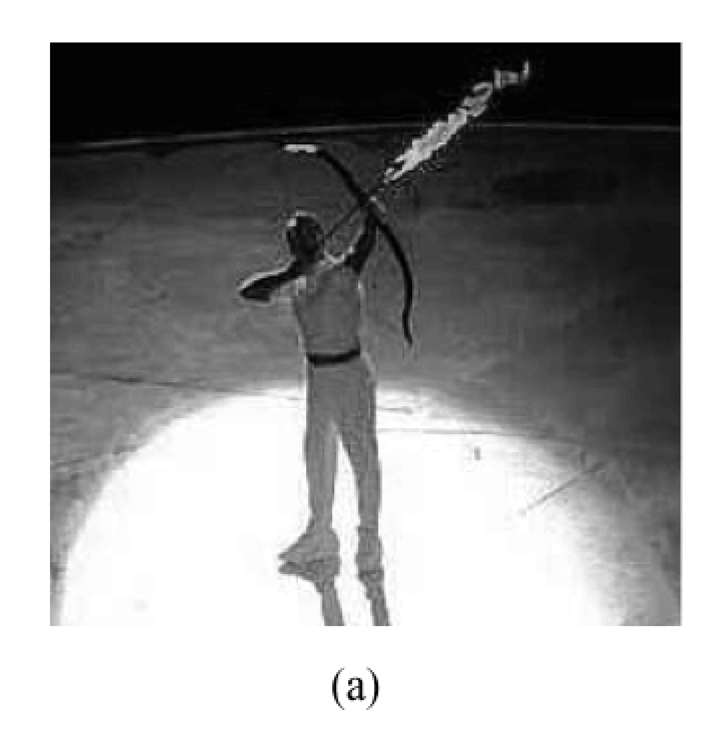
令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}\right)=\ln a+\dfrac{1}{a}\leqslant 1$,由(1)的结论可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a=1$.

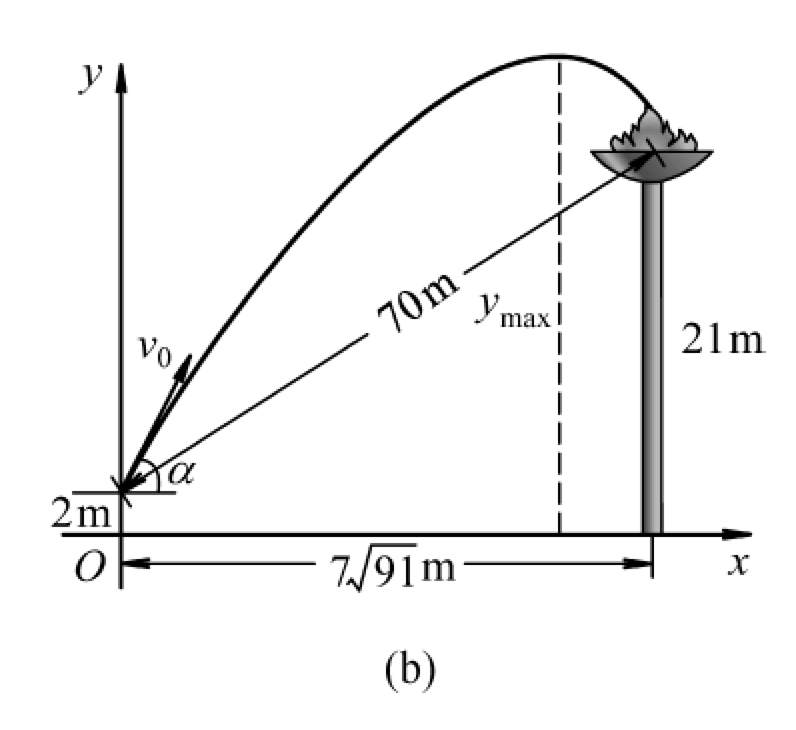
例 3.60 1992 年巴塞罗那夏季奥运会开幕式上的奥运火炬,是由射箭铜牌获得者安东尼奥·雷波罗用一枝燃烧的箭点燃的(参见图 3-1(a)),奥运火炬位于高约 21m 的火炬台顶端的圆盘中,假定雷波罗在地面以上 2m 距火炬台顶端圆盘约 70m 处的位置射出火箭,若火箭恰好在达到其最大飞行高度 1s 后落入火炬圆盘中,试确定火箭的发射角 α 和初速度 v_0.$\Big($假定火箭射出后在空中的运动过程中受到的阻力为零,且 $g=10\mathrm{m/s^2}$,$\arctan\dfrac{22}{20.9}\approx 46.5°$,$\sin 46.5°\approx 0.725$.$\Big)$

解 建立如图 3-1(b)所示坐标系,设火箭被射向空中的初速度为 v_0 m/s,即 $v_0=(v_0\cos\alpha,v_0\sin\alpha)$,则火箭在空中运动 t s 后的位移方程为

$$s(t)=(x(t),y(t))=(v_0\cos\alpha t,2+v_0\sin\alpha t-5t^2).$$

火箭在其速度的竖直分量为零时达到最高点,故有


(a)



(b)

图 3-1

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=(2+v_0\sin\alpha t-5t^2)'=v_0\sin\alpha-10t=0\Rightarrow t=\frac{v_0}{10}\sin\alpha,$$

于是可得出当火箭达到最高点 1s 后的时刻其水平位移和竖直位移分别为

$$x(t)\Big|_{t=\frac{v_0\sin\alpha}{10}+1}=v_0\cos\alpha\left(\frac{v_0}{10}\sin\alpha+1\right)=3.2v_0\cos\alpha=\sqrt{70^2-21^2},$$

$$y(t)\Big|_{t=\frac{v_0\sin\alpha}{10}+1}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{20}-3=21.$$

解得 $v_0\sin\alpha\approx22$，$v_0\cos\alpha\approx20.9$，从而 $\tan\alpha=\frac{22}{20.9}\Rightarrow\alpha\approx46.5°$.

又 $v_0\sin\alpha\approx22$，$\alpha\approx46.5°\Rightarrow v_0\approx30.3(\mathrm{m/s})$，所以，火箭的发射角 α 和初速度 v_0 分别约为 46.5°和 30.3m/s.

例 3.61 曲线 $y=\frac{1}{3}x^6(x>0)$上哪一点处的法线在 y 轴上的截距最小?

解 设 $y=\frac{1}{3}x^6$ 在(x,y)处的法线方程为 $Y-y=k(X-x)$.

因为 $y'=2x^5$，所以 $k=-\frac{1}{2x^5}$，法线方程为 $Y-y=-\frac{1}{2x^5}(X-x)$，整理后为

$$Y=y-\frac{X}{2x^5}+\frac{1}{2x^4}=-\frac{1}{2x^5}X+\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{3}x^6,$$

法线在 y 轴上的截距为 $b=\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{3}x^6$.

求此函数的极值：令 $b'=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=-1$(舍去)；

$$b''=\frac{10}{x^6}+10x^4,\quad b''(1)=20>0,$$

故 $b(1)$为极小值. 由于驻点唯一，知它即是最小值，因此曲线在点$\left(1,\frac{1}{3}\right)$处的法线在 y 轴上截距最小.

例 3.62 设 a 为正常数，使得 $x^2\leqslant e^{ax}$ 对一切正数 x 成立，求常数 a 的最小值.

解 $x^2\leqslant e^{ax}\Leftrightarrow 2\ln x\leqslant ax\Leftrightarrow a\geqslant\frac{2\ln x}{x}$.

要求 a 的最小值，只需求 $f(x)=\frac{2\ln x}{x}$的最大值.

令 $f'(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}=0$ 得 $x=\mathrm{e}$.

由于当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f'(x)<0$. 所以 $f(\mathrm{e})=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ 为其最大值，故 a 的最小值为 $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

题型 3-21　导数在经济方面的应用

【解题思路】 利用边际(一阶导数)求最小成本，最大利润. 利用弹性讨论需求弹性和收益弹性.

利润函数 $L(x)=R(x)-C(x)$，当有唯一驻点使 $L'(x_0)=0$，$L''(x_0)<0$，则在 x_0 处取得最大利润.

需求弹性为 $\dfrac{EQ}{EP}=\dfrac{P}{Q}\cdot\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$.

由于需求函数 $Q=Q(P)$ 一般是单调减少的，因而需求对价格的弹性常为负值.

收益对价格的弹性为 $\dfrac{ER}{EP}=\dfrac{P}{Q}\cdot\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}$. 因为 $R=PQ$，于是有

$$\frac{ER}{EP}=\frac{1}{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}(PQ)}{\mathrm{d}P}=\frac{1}{Q}\left(Q+P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right)=1+\frac{EQ}{EP}.$$

例 3.63 一商家销售某种商品的价格满足关系 $P=7-0.2x$(单位：万元/t)，其中 x 为销售量(单位：t)，商品的成本函数是 $C=3x+1$(万元).

(1) 若每销售 1t 商品，政府要征税 t 万元，求该商家获最大利润时商品的销售量；

(2) t 为何值时，政府的税收总额最大?

解 (1) 该商家销售商品的总收益函数 $R(x)=Px=7x-0.2x^2$. 政府征收的总税额为 $T(x)=tx$，则商家的总利润函数

$$L(x)=R(x)-C(x)-T(x)=-0.2x^2+(4-t)x-1.$$

$L'(x)=-0.4x+4-t$，可求得唯一驻点 $x=\dfrac{5}{2}(4-t)$.

$L''(x)=-0.4<0$，从而 $L(x)$ 在该驻点 $x=\dfrac{5}{2}(4-t)$ 取得最大值，即 $x=\dfrac{5}{2}(4-t)$ 是使商家获得最大利润的销售量.

(2) 政府税收总额 $T=tx=\dfrac{5}{2}t(4-t)$.

令 $T'=10-5t=0$，可得唯一驻点 $t=2$. 又因 $T''<0$，故当 $t=2$ 时政府税收总额最大.

例 3.64 设某产品的需求函数 $Q=Q(P)$ 是单调减少的，收益函数 $R=PQ$，当价格为 P_0 且对应的需求量为 Q_0 时，边际收益 $R'(Q_0)=2$，而 $R'(P_0)=-150$，需求对价格的弹性 EP 满足 $|EP|=\dfrac{3}{2}$，求 P_0，Q_0.

【分析】 为了解决本题，必须建立 $R'(Q)$，$R'(P)$ 与 EP 之间的关系.

因为 $R=PQ=PQ(P)$，于是有

$$R'(P)=Q(P)+P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=Q\left(1+\frac{P}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right)=Q(1+EP).$$

设 $P=P(Q)$ 是需求函数 $Q=Q(P)$ 的反函数，则 $R=PQ=QP(Q)$，于是

$$R'(Q)=P(Q)+Q\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}=P\left(1+\frac{Q}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}\right)=P\left(1+\frac{1}{\frac{P}{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}}\right)=P\left(1+\frac{1}{EP}\right).$$

解 因需求函数 $Q=Q(P)$ 是单调减少的，故需求函数的弹性 $EP<0$，且反函数 $P=P(Q)$ 存在，由题设 $Q_0=Q(P_0)$，$P_0=P(Q_0)$，且 $EP\big|_{P=P_0}=-\frac{3}{2}$，把它们代入分析中得到关系式中，于是有 $R'(Q_0)=P_0\left(1-\frac{2}{3}\right)=2$，故 $P_0=6$.

$$R'(P_0)=Q_0\left(1-\frac{3}{2}\right)=-150，故\ Q_0=300.$$

例 3.65 设平均收益函数和总成本函数分别为

$$\bar{R}=a-bQ，C=\frac{1}{3}Q^3-7Q^2+100Q+50，$$

其中常数 $a>0$，$b>0$ 待定，已知当边际收益 $MR=67$，且需求价格弹性 $EP=-\frac{89}{22}$ 时总利润最大，求总利润最大时的产量，并确定 a，b 的值.

【分析】 平均收益 $\bar{R}=\frac{R}{Q}$，则 $R=\bar{R}Q=aQ-bQ^2$.

通常平均收益即为商品的价格，即 $P=a-bQ$，则 $Q=\frac{1}{b}(a-P)$.

进而可求得需求对价格的弹性 $EP=\frac{P}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=\frac{1}{b}\cdot\frac{a-bQ}{Q}=1-\frac{a}{bQ}$.

解 总利润函数

$$L(Q)=R-C=Q\bar{R}-C=-\frac{1}{3}Q^3+(7-b)Q^2+(a-100)Q-50.$$

从而使利润最大的产量 Q 及相应的 a，b 应满足 $L'(Q)=0$，$MR=67$ 以及 $EP=-\frac{89}{22}$，即

$$\begin{cases}-Q^2+2(7-b)Q+a-100=0,\\ a-2bQ=67,\\ 1-\frac{a}{bQ}=-\frac{89}{22}.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a=111,\\ b=\frac{22}{3},\\ Q=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=111,\\ b=2,\\ Q=11.\end{cases}$ 将第一组解中的 a，b 代入总利润函数，得

$$L(Q)=-\frac{1}{3}Q^3-\frac{1}{3}Q^2+11Q-50.$$

虽然 $L'(3)=0$，$L''(3)<0$，即 $L(3)$ 为 $L(Q)$ 的最大值，但 $L(3)<0$，不合实际，故舍去.

将第二组解中的 a，b 代入总利润函数，得 $L(Q)=-\frac{1}{3}Q^3+5Q^2+11Q-50$，故有 $L'(11)=0$，$L''(11)<0$，即 $L(11)$ 为 $L(Q)$ 的最大值. 又因 $L(11)>0$，故 $a=111$，$b=2$ 是所求常数的值，使利润最大的产量为 $Q=11$.

例 3.66 设某商品的需求函数为 $Q=100-5P$，其中价格 $P\in(0,20)$，Q 为需求量.

（1）求需求量对价格的弹性 $E_d(E_d>0)$；

（2）推导 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q(1-E_d)$（其中 R 为收益），并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时，降低价格反而使收益增加.

【分析】 由于 $E_d>0$，所以 $E_d=\left|\frac{P}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right|$；由 $R=PQ$ 及 $E_d=\left|\frac{P}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right|$ 可推导

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q(1-E_d).$$

解 （1）$E_d=\left|\frac{P}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right|=\frac{P}{20-P}$.

（2）由 $R=PQ$，得 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q+P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=Q\left(1+\frac{P}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right)=Q(1-E_d)$.

又由 $E_d=\frac{P}{20-P}=1$，得 $P=10$.

当 $10<P<20$ 时，$E_d>1$，于是 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}<0$，故当 $10<P<20$ 时，降低价格反而使收益增加.

注 当 $E_d>0$ 时，需求量对价格的弹性公式为 $E_d=\left|\frac{P}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right|=-\frac{P}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$.

利用需求弹性分析收益的变化情况有以下四个常用的公式：

$$\mathrm{d}R=(1-E_d)Q\mathrm{d}P,\quad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=(1-E_d)Q,\quad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=\left(1-\frac{1}{E_d}\right)P,$$

$$\frac{ER}{EP}=1-E_d\text{（收益对价格的弹性）}.$$

例 3.67 设生产某产品的固定成本为 6000 元，可变成本为 20 元/件，价格函数为 $P=60-\frac{Q}{1000}$（P 是单价，单位：元；Q 是销量，单位：件），已知产销平衡，求：

（1）该产品的边际利润.

（2）当 $P=50$ 时的边际利润，并解释其经济意义.

（3）使得利润最大的定价 P.

解 （1）设利润为 $L(Q)$，则 $L(Q)=R-C=PQ-(6000+20Q)=40Q-\frac{Q^2}{1000}-6000$，边际利润为 $L'(Q)=40-\frac{Q}{500}$.

（2）当 $P=50$ 时，$Q=10000$，边际利润为 20.

经济意义为：当 $P=50$ 时，销量每增加一个，利润增加 20.

（3）令 $L'(Q)=40-\frac{Q}{500}=0$，得 $Q=20000$，$P=60-\frac{20000}{10000}=40$，而 $L''(Q)=-\frac{1}{500}<0$，故当 $P=40$ 时，利润达到最大.

例 3.68 为了实现利润的最大化，厂商需要对某商品确定其定价模型，设 Q 为该商品的需求量，P 为价格，$C'(Q)$ 为边际成本，η 为需求弹性（$\eta>0$）.

（1）证明定价模型为 $P=\frac{C'(Q)}{1-\frac{1}{\eta}}$；

(2) 若该商品的成本函数为 $C(Q)=1600+Q^2$，需求函数为 $Q=40-P$，试由(1)中的定价模型确定此商品的价格.

解 (1) 由于利润函数 $L(Q)=R(Q)-C(Q)=PQ-C(Q)$，两边对 Q 求导，得 $\frac{dL}{dQ}=P+Q\frac{dP}{dQ}-C'(Q)=P+Q\frac{dP}{dQ}-C'(Q)$. 当且仅当 $\frac{dL}{dQ}=0$ 时，利润 $L(Q)$ 最大. 又由于 $\eta=-\frac{P}{Q}\cdot\frac{dQ}{dP}$，所以 $\frac{dP}{dQ}=-\frac{1}{\eta}\cdot\frac{P}{Q}$，故当 $P=\frac{C'(Q)}{1-\frac{1}{\eta}}$ 时，利润最大.

(2) 由于 $C'(Q)=2Q=2(40-P)$，则 $\eta=-\frac{P}{Q}\cdot\frac{dQ}{dP}=\frac{P}{40-P}$. 代入(1)中的定价模型，得 $P=\frac{2(40-P)}{1-\frac{40-P}{P}}$，从而解得 $P=30$.

3.4 课后习题解答

习题 3.1

1. 验证函数 $f(x)=\ln\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上满足罗尔定理的条件，并求出相应的 ξ，使 $f'(\xi)=0$.

解 一方面，因为 $f(x)=\ln\sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上连续、在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ 内可导，且 $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=y\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\ln\frac{1}{2}$，所以 $f(x)=\ln\sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上满足罗尔定理的条件，存在 $\xi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，使得 $f'(\xi)=0$. 另一方面，$f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{\pi}{2}$，则罗尔定理中的 $\xi=\frac{\pi}{2}$，$f'(\xi)=0$.

2. 下列函数在指定区间上是否满足罗尔定理的三个条件？有没有满足定理结论中的 ξ?

(1) $f(x)=e^{x^2}-1$，$[-1,1]$； (2) $f(x)=|x-1|$，$[0,2]$； (3) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0<x\leqslant\pi,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ $[0,\pi]$.

解 (1) 因为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续、在 $(-1,1)$ 内可导，且 $f(-1)=f(1)=e-1$，所以满足罗尔定理中的三个条件. 由 $f'(x)=2xe^{x^2}$，若令 $f'(\xi)=0$，则有 $\xi=0$.

(2) 因为函数在 $x=1$ 点的导数不存在，故不满足罗尔定理的条件.

(3) 因为函数在 $x=0$ 点不连续，故不满足罗尔定理的条件. 但存在 $\xi=\frac{\pi}{2}\in(0,\pi)$，使得 $f'(\xi)=\cos\frac{\pi}{2}=0$.

3. 若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有一个正根 x_0，证明方程 $a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 x_0 的正根.

证明 作辅助函数 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$. 显然 $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上连续，在 $(0,x_0)$ 内可导，且 $f(0)=f(x_0)=0$. 故由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,x_0)$ 使 $f'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=a_0n\xi^{n-1}+a_1(n-1)\xi^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$，从而题设方程在 $(0,x_0)$ 内至少有一个实根.

4. 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，试证：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$，$\xi\in(a,b)$.

证明 构造函数 $F(x)=e^xf(x)$，显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$，根据罗尔定理：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $F'(\xi)=0$，进而得到 $f(\xi)+f'(\xi)=0$，$\xi\in(a,b)$.

5. 设 $f(a)=f(c)=f(b)$，且 $a<c<b$，$f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

证明 由 $f(a)=f(c)$，根据罗尔定理，存在 $\xi_1\in(a,c)$，使得 $f'(\xi_1)=0$；

由 $f(b)=f(c)$，根据罗尔定理，存在 $\xi_2\in(c,b)$，使得 $f'(\xi_1)=0$.

由 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在，得到 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且可导，又 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，根据罗尔定理知：存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $f''(\xi)=0$.

6. 验证拉格朗日中值定理对函数 $f(x)=x^3+2x$ 在区间 $[0,1]$ 上的正确性，并求出满足条件的 ξ 值.

解 一方面，$f(x)=x^3+2x$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，满足拉格朗日中值定理的条件.

另一方面，$f'(x)=3x^2+2$，$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=3$.

当 $\xi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 时 $f'(\xi)=3\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+2=3$，即当 $\xi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，有 $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(\xi)$. 拉格朗日定理的结论成立.

7. 试证明对函数 $y=px^2+qx+r$，应用拉格朗日中值定理时所求得的点 ξ 总位于区间的正中间.

证明 设 $y=f(x)=px^2+qx+r$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，故由拉格朗日中值定理得存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{p(b^2-a^2)+q(b-a)}{b-a}=p(b+a)+q.$$

而 $f'(x)=2px+q$，故得 $2p\xi+q=p(b+a)+q$，从而 $\xi=\dfrac{b+a}{2}$，即 ξ 为 $[a,b]$ 中点.

8. 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，试证：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=f(a)$，$\xi\in(a,b)$.

【分析】 本题既可以用罗尔定理证明，又可以用拉格朗日定理证明.

用罗尔定理证明用原函数构造法构造辅助函数. 待证等式变形为 $f(\xi)+\xi f'(\xi)-f(a)=0$.

将 ξ 变为 x 得 $f(x)+xf'(x)-f(a)=0$. 故设

$$F'(x)=f(x)+xf'(x)-f(a),\quad 则\ F(x)=xf(x)-xf(a).$$

证明 证法一 令 $F(x)=xf(x)-xf(a)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且

$$F(a)=af(a)-af(a)=0,\quad F(b)=bf(b)-bf(a)=0.$$

由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即有

$$f(\xi)+\xi f'(\xi)-f(a)=0,\quad 即\ f(\xi)+\xi f'(\xi)=f(a).$$

证法二 利用拉格朗日中值定理证明. 令 $F(x)=xf(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，由拉格朗日定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\xi),\quad 即\ f(\xi)+\xi f'(\xi)=\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=\frac{f(a)(b-a)}{b-a}=f(a).$$

9. 证明下列不等式：

(1) $a>b>0$，$n>1$，证明 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$；

(2) $a>b>0$，证明 $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$；

(3) $|\arctan b-\arctan a|\leqslant|b-a|$.

证明 (1) 设 $f(x)=x^n$，对于 $a>b>0$，$n>1$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$，即 $\dfrac{b^n-a^n}{b-a}=n\xi^{n-1}$，也即

$$na^{n-1}(b-a)<b^n-a^n=n\xi^{n-1}(b-a)<nb^{n-1}(b-a),$$
$$nb^{n-1}(b-a)<a^n-b^n=n\xi^{n-1}(b-a)<na^{n-1}(a-b).$$

(2) 设 $f(x)=\ln x$，$f(x)$ 在 $[b,a]$ 上连续，在 (b,a) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(\xi)$，即

$\frac{\ln a-\ln b}{a-b}=\frac{1}{\xi}$，也即 $\ln\frac{a}{b}=\frac{a-b}{\xi}$，而 $\frac{a-b}{a}<\frac{a-b}{\xi}<\frac{a-b}{b}$，从而 $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$.

(3) 设 $f(x)=\arctan x$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$，即 $\frac{\arctan b-\arctan a}{b-a}=\frac{1}{1+\xi^2}$，从而 $\arctan b-\arctan a=\frac{1}{1+\xi^2}(b-a)$，而 $\left|\frac{1}{1+\xi^2}(b-a)\right|\leqslant|b-a|$，所以 $|\arctan b-\arctan a|\leqslant|b-a|$.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导. 试证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

证明 待证结论恒等变形为 $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\frac{f'(x)}{(x^2)'}\bigg|_{x=\xi}$，故设 $g(x)=x^2$，对 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上应用柯西中值定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，从而

$$\frac{f(1)-f(0)}{1}=\frac{f'(\xi)}{2\xi},\quad 即\ f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)].$$

注 也可令 $F(x)=f(x)-x^2[f(1)-f(0)]$，利用罗尔定理证明.

提高题

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,f(1)=1$. 证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

(2) 存在两个不同的点 $\eta,\tau\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\tau)=1$.

证明 (1) 令 $F(x)=f(x)+x-1$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且

$$F(0)=f(0)+0-1=-1,\quad F(1)=f(1)+1-1=1,\quad 故\ F(0)\cdot F(1)<0.$$

由零点存在定理存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$.

(2) $f(x)$ 在 $[0,\xi]$ 上连续，在 $(0,\xi)$ 内可导，由拉格朗日中值定理得存在 $\eta\in(0,\xi)$，使得 $f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\frac{1-\xi}{\xi}$.

又 $f(x)$ 在 $[\xi,1]$ 上连续，在 $(\xi,1)$ 内可导，由拉格朗日中值定理得存在 $\tau\in(\xi,1)$，使得 $f'(\tau)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi}$.

综上得 $f'(\eta)f'(\tau)=1$.

2. 已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，试证：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0,\quad \xi\in(a,b).$$

证明 令 $F(x)=f(x)e^{g(x)}$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$. 由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $e^{g(\xi)}(f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi))=0$，从而有 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

3. 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导且存在相等的最大值. 又 $f(a)=g(a),f(b)=g(b)$. 证明：(1) 存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $f(\eta)=g(\eta)$；(2) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

证明 (1) 函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故可设 $f(x)$ 在 $\xi_1\in[a,b]$ 处取得最大值 $f(\xi_1)=M$，$g(x)$ 在 $\xi_2\in[a,b]$ 处取得最大值 $g(\xi_2)=M$.

若 $\xi_1=\xi_2$，则取 $\eta=\xi_1=\xi_2$，有 $f(\eta)=g(\eta)$.

若 $\xi_1<\xi_2$，令 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续，且

$$F(\xi_1)=f(\xi_1)-g(\xi_1)=M-g(\xi_1)>0,\quad F(\xi_2)=f(\xi_2)-g(\xi_2)=f(\xi_2)-M<0,$$

由介值定理，存在 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $F(\eta)=0$，即 $f(\eta)=g(\eta)$.

(2) 设 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,\eta]$ 上连续，在 (a,η) 内可导，且 $F(a)=F(\eta)=0$. 由罗尔定理，存在 $\eta_1\in(a,\eta)$，使得 $F'(\eta_1)=0$；

同理，$F(x)$在$[\eta,b]$上连续，在(η,b)内可导，且$F(b)=F(\eta)=0$. 由罗尔定理，存在$\eta_2\in(\eta,b)$，使得$F'(\eta_2)=0$；

$F(x)$在$[\eta_1,\eta_2]$上连续，在(η_1,η_2)内可导，且$F'(\eta_1)=F'(\eta_2)=0$. 由罗尔定理，存在$\xi\in(\eta_1,\eta_2)$，使得$F''(\xi)=0$.

4. 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上具有二阶导数，且$f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，证明：

(1) 方程$f(x)=0$在区间$(0,1)$至少存在一个实根；

(2) 方程$f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$在区间$(0,1)$内至少存在两个不同实根.

证明 (1) 根据极限的局部保号性的结论，由条件$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$可知，存在$0<\delta<1$，及$x_1\in(0,\delta)$，使得$f(x_1)<0$. 由于$f(x)$在$[x_1,1]$上连续，且$f(x_1)\cdot f(1)<0$，由零点定理，存在$\xi\in(x_1,1)\subset(0,1)$，使得$f(\xi)=0$，也就是方程$f(x)=0$在区间$(0,1)$至少存在一个实根.

(2) 由条件$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$可知$f(0)=0$，由(1)可知$f(\xi)=0$，由罗尔定理，存在$\eta\in(0,\xi)$，使得$f'(\eta)=0$.

设$F(x)=f(x)f'(x)$，由条件可知$F(x)$在区间$[0,1]$上可导，且$F(0)=0$，$F(\xi)=0$，$F(\eta)=0$，分别在区间$[0,\eta]$，$[\eta,\xi]$上对函数$F(x)$使用罗尔定理，则存在$\xi_1\in(0,\eta)\subset(0,1)$，$\xi_2\in(\eta,\xi)\subset(0,1)$，使得$\xi_1\neq\xi_2$，$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$，也就是方程$f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$在区间$(0,1)$内至少存在两个不同实根.

5. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导且$f(0)=0$，但当$x\in(0,1)$时，$f(x)>0$，求证：$\exists\xi\in(0,1)$，使$\dfrac{2016\cdot f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

证明 设$F(x)=f^{2016}(x)\cdot f(1-x)$，则$F(0)=F(1)=0$，且$F(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理的条件，由罗尔定理，$\exists\xi\in(0,1)$，使$F'(\xi)=2016f^{2015}(\xi)\cdot f'(\xi)\cdot f(1-\xi)-f^{2016}(\xi)\cdot f'(1-\xi)=0$.

又因为$x\in(0,1)$时，$f(x)>0$，所以

$$2016\cdot f'(\xi)\cdot f(1-\xi)-f(\xi)\cdot f'(1-\xi)=0,\text{即}\frac{2016\cdot f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

6. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，并且满足$f(0)\leqslant0$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$. 试证：

(1) 存在$\xi_1\in(-\infty,0)$和$\xi_2\in(0,+\infty)$使得$f(\xi_1)=2014=f(\xi_2)$；

(2) 存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)$使得$f(\xi)+f'(\xi)=2014$.

证明 (1) 由$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$，取$M=2014$，则存在$X>0$，当$|x|\geqslant X$时，$f(x)>2014$.

令$F(x)=f(x)-2014$，则$F(x)$在$[-X,X]$上连续，且

$$F(-X)=f(-X)-2014>0,\quad F(X)=f(X)-2014>0,\quad F(0)=f(0)-2014<0,$$

所以$F(-X)F(0)<0$，$F(X)F(0)<0$.

由零点定理知，存在$\xi_1\in(-\infty,0)$和$\xi_2\in(0,+\infty)$使得$F(\xi_1)=0=F(\xi_2)$，即$f(\xi_1)=2014=f(\xi_2)$；

(2) 构造辅助函数$\Phi(x)=e^x(f(x)-2014)$，$x\in[\xi_1,\xi_2]$，则

$\Phi(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上连续，在(ξ_1,ξ_2)内可导，且$\Phi(\xi_1)=\Phi(\xi_2)=0$. 由罗尔定理，存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)$使得$\Phi'(\xi)=0$，即$\Phi'(\xi)=e^\xi(f(\xi)+f'(\xi)-2014)=0$，由此可得$f(\xi)+f'(\xi)=2014$.

7. 设函数$f(x)$在$[-2,2]$上二阶可导，且$|f(x)|\leqslant1$，$f(-2)=f(0)=f(2)$. 又设$[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$，试证：在$(-2,2)$内至少存在一点ξ，使$f(\xi)+f''(\xi)=0$.

证明 设$F(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2$，则$F(x)$在$[-2,2]$上可导.

由于$f(x)$在$[-2,2]$上可导及$f(-2)=f(0)=f(2)$，所以存在$a\in(-2,0)$及$b\in(0,2)$使得$f'(a)=f'(b)=0$. 由此可得$F(a)=[f(a)]^2+[f'(a)]^2\leqslant1$，$F(b)=[f(b)]^2+[f'(b)]^2\leqslant1$.

由题设$F(0)=4$知，$F(x)$在$[a,b]$上的最大值M必在(a,b)内取到，即存在$\xi\in(a,b)$，使得$F(\xi)=M$，从而$F'(\xi)=0$，即$f'(\xi)[f(\xi)+f'(\xi)]=0$. 由于$F(\xi)=[f(\xi)]^2+[f'(\xi)]^2\geqslant F(0)=4$，而$f(\xi)\leqslant1$，所以有

$f'(\xi)\neq 0$，由此可得 $f(\xi)+f''(\xi)=0(\xi\in(a,b)\subset(-2,2))$.

习题 3.2

1. 利用洛必达法则求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$；　(5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$；　(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$；　(9) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\cot x}$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x$；　(11) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-x)$；　(12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$；

(13) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$；　(14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$；　(15) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-e^x}{2+x}\right)^{\csc x}$；

(16) $\lim\limits_{x\to 0}x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{3\cos 3x}{5\sec^2 5x}=-\dfrac{3}{5}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}\xlongequal{\text{无穷小代换}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{1}=2$；

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{2(\pi-2x)\cdot(-2)}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\csc^2 x}{8}=-\dfrac{1}{8}$；

(5) 当 $a\neq 0$ 时，原式 $=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\dfrac{m}{n}a^{m-n}$，

当 $a=0$ 时，原式 $=\begin{cases}0, & m>n,\\ 1, & m=n,\\ \infty, & m<n;\end{cases}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\operatorname{arccot} x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{-\dfrac{1}{1+x^2}}=1$；

(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{\sin 3x}=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-3\sin 3x}{-\sin x}=3$；$\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{\sin 3x}=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2}}{\sin\dfrac{3\pi}{2}}=-1\right)$

(9) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\cot x}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\csc^2 x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2 x}{x}=0$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$；

(11) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}-1\right)$

$$=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=\frac{1}{3};$$

（12）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)\overset{\text{通分}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x(e^x-1)-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-e^x}{2}=\frac{3}{2}$；

（13）原式$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln(1+\sin x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e$；

（14）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln\frac{2}{\pi}\arctan x}\left(x\to+\infty,\ln\frac{2}{\pi}\arctan x\sim\frac{2}{\pi}\arctan x-1\right)$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{2}{\pi}\arctan x-1\right)}\left(\infty\cdot 0\text{ 型化为}\frac{0}{0}\text{型}\right)$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\pi}\arctan x-1}{\frac{1}{x}}}\text{（洛必达法则）;}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{-\frac{2}{\pi}}$$

（15）原式$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\csc x[\ln(3-e^x)-\ln(2+x)]}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(3-e^x)-\ln(2+x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-e^x}{3-e^x}-\frac{1}{2+x}}{1}}=e^{-\frac{1}{4}}$；

（16）令 $x^2=\frac{1}{t}$，则原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^t}{t}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{1}=+\infty$.

2. 设$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+mx+n}{x-1}=5$，求常数 m,n 的值.

解　因为$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，而$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+mx+n}{x-1}=5$，所以$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+mx+n)=1+m+n=0$. 由洛必达法则得$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+mx+n}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x+m}{1}=2+m=5$，从而得 $m=3,n=-4$.

3. 验证极限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$存在，但不能由洛必达法则得出.

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1$.

而用洛必达法则，有$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\cos x}{1}\right)$不存在. 这验证了$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$不存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$存在.

4. 设 $f(x)$二阶连续可导，求$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$.

解　原式$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f''(x+h)+f''(x-h)}{2}=f''(x)$.

5. 设 $f(x)$具有二阶连续导数，且 $f(0)=0$，试证 $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f'(0) & x=0\end{cases}$可导，且导函数连续.

证明　由已知$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=g(0)$，故 $g(x)$连续，且当 $x\neq 0$ 时，$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，而

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(0)$$

当 $x\neq 0$ 时，$g'(x)$ 显然连续．而

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = \frac{1}{2}f''(0) = g'(0),$$

所以 $g'(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，从而 $g'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续函数．

6．讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0,\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性．

解 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)}}=e^{-\frac{1}{2}}=f(0).$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续．

提高题

1．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}(a>0)$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{2}{x}}$；

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$；　(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x-\sin x}$；　(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$．

解 (1) 这类题应先变形，再等价无穷小代换或用洛必达法则．

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\left[\left(1+\frac{x}{a}\right)^x-1\right]}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{x}{a}\right)^x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x}{a}}{x^2}=\frac{1}{a}.$$

(2) 属于 1^∞．$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1+2^x}{2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{2^x-1}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{x\ln 2}{2}}=e^{\frac{\ln 2}{2}}=\sqrt{2}$.

(3) 属于 1^∞．$\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}[\cos\sqrt{x}-1]}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}\left(-\frac{1}{2}x\right)}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{\ln x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(e^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln\frac{\ln x}{x}}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln\ln x-\ln x}{\ln x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}-1}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x\ln x}}{\frac{1}{x}}-1}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{\ln x}-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-\cos x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}[1-(1+x^2)\cos x]}{1-\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[1-(1+x^2)\cos x]}{1-\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2}\qquad\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2}=1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x^2)\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x\cos x+(1+x^2)\sin x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x\cos x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)\sin x}{x}=-2+1=-1.$$

(6) 属于 1^∞．$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos x-\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}}=e^{-\sqrt{2}}$.

2. 设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x, g(x)=kx^3$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小，求 a，b，k 的值.

解 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}\text{（洛必达法则）}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\dfrac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}=1.$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}3kx^2=0$，所以有 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x\right)=0$，即 $1+a+0=0$，得 $a=-1$.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{-1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x}{6kx}\left(\text{分子的极限为 }0\text{，得 }b=-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{2}{(1+x)^3}-2b\sin x-b\sin x-bx\cos x}{6k}=1\left(\text{得 }k=-\frac{1}{3}\right).$$

所以 $a=-1, b=-\dfrac{1}{2}, k=-\dfrac{1}{3}$.

习题 3.3

1. 将 $f(x)=xe^x$ 展开成 n 阶麦克劳林公式.

解 直接法　利用求积的高阶导数的莱布尼茨公式，得

$$f^{(n)}(x)=(e^x)^{(n)}x+n(e^x)^{(n-1)}x'+0=e^x(x+n),$$

于是 $f(0)=0, f^{(n)}(0)=n, a_0=0, a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{1}{(n-1)!}\quad(n=1,2,\cdots)$，余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^{\theta x}(\theta x+n+1)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1),$$

因此，$f(x)$ 的 n 阶麦克劳林公式为

$$f(x)=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+\frac{e^{\theta x}(\theta x+n+1)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1),$$

或具有佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式为

$$f(x)=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+o(x^n).$$

间接法　利用 e^x 的 $n-1$ 阶麦克劳林公式，可间接得到函数 xe^x 的 n 阶麦克劳林公式

$$xe^x=x\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+o(x^{n-1})\right]=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+o(x^n).$$

2. 当 $x_0=-1$ 时，求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的 n 阶泰勒公式.

解 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$f(-1)=\dfrac{1}{-1}=-1$；　$f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$，$f'(-1)=-1$；

$$f''(x)=\frac{2}{x^3},\ f''(-1)=-2,\cdots,f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},f^{(n)}(-1)=\frac{(-1)^n n!}{(-1)^{n+1}}=-n!.$$

故 $\dfrac{1}{x}=-1-(x+1)-(x+1)^2+\cdots-(x+1)^n+\dfrac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}(x+1)^{n+1}$.

3. 按 $x-4$ 的乘幂展开多项式 $f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$.

解 $f(4)=4^4-5\times 4^3+4^2-3\times 4+4=-4^3+4+4=-56$；

$f'(x)=4x^3-15x^2+2x-3$，　$f'(4)=4\times 4^3-15\times 4^2+2\times 4-3=21$；

$f''(x)=12x^2-30x+2$，　$f''(4)=12\times 4^2-30\times 4+2=74$；

$f'''(x)=24x-30$， $f'''(4)=66$； $f^{(4)}(x)=24$.

故 $f(x)=-56+21(x-4)-37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4$.

4. 利用泰勒公式求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

解 (1) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

(2) 当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$，

当 $x\to\infty$时，$\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{3x^3}+o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$，

故

$$\lim_{x\to+\infty}x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{1}{2}.$$

提高题

1. 当 $x\to 0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$是比 x^2 高阶的无穷小，求 a,b.

解 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$，故

$$e^x-(ax^2+bx+1)=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(ax^2+bx+1)=(1-b)x+\left(\frac{1}{2}-a\right)x^2+o(x^2)=o(x^2),$$

则 $1-b=0$，$\dfrac{1}{2}-a=0$，故 $b=1$，$a=\dfrac{1}{2}$.

2. 设 $f(x)$在$[-1,1]$上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$. 证明：在$(-1,1)$内至少存在一点 ξ，使得 $f'''(\xi)=3$.

证明 将 $f(x)$在 $x=0$ 处展开成二阶麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(\eta)}{3!}x^3,$$
$$f(1)=f(0)+f'(0)+\frac{f''(0)}{2}+\frac{f'''(\eta_1)}{3!},\quad \eta_1\in(0,1),$$
$$f(-1)=f(0)-f'(0)+\frac{f''(0)}{2}-\frac{f'''(\eta_2)}{3!},\quad \eta_2\in(-1,0),$$

故 $f(1)-f(-1)=\dfrac{f'''(\eta_1)}{3!}+\dfrac{f'''(\eta_2)}{3!}$，即$\dfrac{1}{3!}(f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2))=1$，于是 $f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$.

因为 $f(x)$在$[-1,1]$上具有三阶连续导数，所以 $f'''(x)$在$[\eta_2,\eta_1]$上连续，能取到最大值 M 和最小值 m，即

$$m\leqslant f'''(\eta_1)\leqslant M,\qquad m\leqslant f'''(\eta_2)\leqslant M.$$

于是

$$2m\leqslant f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)\leqslant 2M,\quad 即\ m\leqslant\frac{f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)}{2}\leqslant M.$$

由 $f'''(x)$的连续性知，存在 $\xi\in[\eta_2,\eta_1]\subset(0,1)$，使得 $f'''(\xi)=\dfrac{f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)}{2}=3$.

3. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1-\ln(1+x^2)}{\sqrt{1+x}-1-\dfrac{1}{2}x}$.

解 $\cos x=1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$, $\ln(1+x^2)=x^2+o(x^2)$, $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+o(x^2)$,故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1-\ln(1+x^2)}{\sqrt{1+x}-1-\dfrac{1}{2}x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)-1-x^2+o(x^2)}{1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+o(x^2)-1-\dfrac{1}{2}x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{3}{2}x^2+o(x^2)}{-\dfrac{1}{8}x^2+o(x^2)}=12.$$

4. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$.

解 $e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{1}{2}x^4+o(x^4)$, $\cos x=1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4+o(x^4)$,故

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2+\dfrac{1}{2}x^4+2-x^2+\dfrac{2}{4!}x^4-3+o(x^4)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{2}{4!}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{7}{12}.$$

5. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{x-\sin x}$.

解 解法一 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{[\tan(\tan x)-\tan(\sin x)]+[\tan(\sin x)-\sin(\sin x)]}{x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{x-\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\sec^2\xi\cdot\frac{\tan x-\sin x}{x-\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)[1-\cos(\sin x)]}{x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x-\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{1}{2}\sin^2 x}{x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\,[1-\cos x]}{x-\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2}x^3}{x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{1}{2}x^2}{\dfrac{1}{6}x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2}x^3}{\dfrac{1}{6}x^3}=3+3=6.$$

解法二 因为 $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$,$\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$,所以

$$\tan(\tan x)=\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+o(x^3),\quad \sin(\sin x)=\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3),$$

$$x-\sin x=\frac{1}{6}x^3+o(x^3),$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+\dfrac{1}{3}\tan^3 x-\sin x+\dfrac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3)}{\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}+\dfrac{\tan^3 x}{3x^3}+\dfrac{\sin^3 x}{6x^3}+\dfrac{o(x^3)}{x^3}}{\dfrac{1}{6}+\dfrac{o(x^3)}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}=6.$$

6. 设 $f(x)=x^2\sin x$，则 $f^{(2015)}(0)=$________.

解 $f^{(2015)}(x)=(\sin x)^{(2015)}x^2+2015(\sin x)^{(2014)}\cdot 2x+\frac{2015\times 2014}{2}(\sin x)^{(2013)}\cdot 2$

$=(\sin x)^{(2015)}x^2+2015(\sin x)^{(2014)}\cdot 2x+\frac{2015\cdot 2014}{2}\sin\left(x+2013\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2$，

$f^{(2015)}(0)=(\sin x)^{(2015)}\cdot 0+2015(\sin x)^{(2014)}\cdot 0+\frac{2015\cdot 2014}{2}\sin\left(0+2013\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2$

$=\frac{2015\times 2014}{2}\sin\left(0+2013\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2=2015\times 2014.$

7. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，则 $f^{(3)}(0)=$________.

解 由函数的麦克劳林级数公式：$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，知 $f^{(n)}(0)=n!a_n$，其中 a_n 为展开式中 x^n 的系数. 由于 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots,x\in[-1,1]$，所以 $f^{(3)}(0)=0$.

习题 3.4

1. 求下面函数的单调区间与极值：

(1) $f(x)=2x^3-6x^2-18x-7$；　　(2) $f(x)=x-\ln x$；

(3) $f(x)=1-(x-2)^{\frac{2}{3}}$；　　(4) $f(x)=|x|(x-4)$.

解 (1) 取 $f'(x)=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+1)=0$，得 $x=-1,x=3$.

当 $x>3$ 或 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$；当 $-1<x<3$ 时，$f'(x)<0$. 故单增区间 $(-1,-\infty),(3,+\infty)$；单减区间为 $[-1,3]$. 极大值 $f(-1)=3$，极小值 $f(3)=-47$.

(2) $f(x)=x-\ln x$，定义域 $(0,+\infty)$. 令 $f'(x)=1-\frac{1}{x}=0$，得 $x=1$.

当 $x<1$ 时 $f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$. 故单增区间 $(1,+\infty)$；单减区间为 $(0,1]$. 极小值 $f(1)=1$.

(3) $f'(x)=-\frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}}=-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$. 当 $x<2$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)<0$. 所以，单增区间为 $(-\infty,2)$，单减区间为 $(2,+\infty)$，极大值为 $f(2)=1$.

(4) $f(x)=\begin{cases}x^2-4x, & x>0,\\ -x^2+4x, & x\leqslant 0;\end{cases}$ $f'(x)=\begin{cases}2x-4, & x>0,\\ -2x+4, & x<0,\end{cases}$ $f'(0)$ 不存在.

当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$；当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，故单增区间 $(-\infty,0),(2,+\infty)$；单减区间为 $(0,2]$. 极大值 $f(0)=0$，极小值 $f(2)=-4$.

2. 求下列函数的极值：

(1) $f(x)=x^3-3x^2+7$；　　(2) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$；　　(4) $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$.

解 (1) $f'(x)=3x^2-6x$. 令 $f'(x)=3x^2-6x=0$，得驻点 $x=0,x=2$.

本题的二阶导数比较容易求，而且形式简单，因此用第二充分条件. $f''(x)=6x-6$，故：

$f''(0)=-6$，$f(x)=x^3-3x^2+7$ 在 $x=0$ 处取得极大值 $f(0)=7$；

$f''(2)=6$，$f(x)=x^3-3x^2+7$ 在 $x=2$ 处取得极小值 $f(2)=3$.

(2) $f'(x)=\frac{2[(1+x^2)-x\cdot 2x]}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. 令 $f'(x)=0$，得 $x=-1,x=1$.

本题的二阶导数求起来比较麻烦，判断驻点处的二阶导数符号也麻烦，因此用取得极值的第一充分条件.

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$；当 $-1<x<1$ 时，$f'(x)>0$. 故 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值 $f(-1)=-1$.

当 $-1<x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$. 故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 $f(1)=1$.

(3) 函数的定义域为 $[-1,2]$. $f'(x)=\frac{1}{2}\frac{1-2x}{\sqrt{2+x-x^2}}$. 令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$.

当 $-1<x<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$；当 $\frac{1}{2}<x<2$ 时，$f'(x)<0$. 故 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得极大值 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$.

(4) $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=xe^{-x}(2-x)$. 令 $f'(x)=0$，得 $x=0, x=2$.

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $0<x<2$ 时，$f'(x)>0$. 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)=0$.

当 $0<x<2$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)<0$. 故 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极大值 $f(2)=4e^{-2}$.

3. 试证方程 $\sin x=x$ 只有一个根.

证明　令 $f(x)=x-\sin x$，其定义域 $(-\infty,+\infty)$.

一方面，$f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上连续，$f(-2)=-2-\sin(-2)<0$，$f(2)=2-\sin(2)>0$，由零点定理，$f(x)=x-\sin x=0$ 在 $[-2,2]$ 上至少存在一个根.

另一方面，$f'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，且 $f'(x)$ 不恒等于零，因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加，$f(x)=x-\sin x=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 至多有一个根.

故 $f(x)=x-\sin x=0$ 有且仅有一个根.

4. 已知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，若 $f(0)=0$，$f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内存在且单调增加，证明 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内也单调增加.

证明　令 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，则

$$F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{xf'(x)-[f(x)-f(0)]}{x^2}$$

$$=\frac{xf'(x)-xf'(\xi)}{x^2}\xlongequal{\xi\in(0,x)}\frac{x(f'(x)-f'(\xi))}{x^2}>0,$$

故 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内也单调增加.

5. 证明下列不等式：

(1) $1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$, $x>0$；　(2) $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$, $x>0$；　(3) $e^x>ex$, $x>1$.

证明　上面三个题都可用泰勒公式做，还可用单调性做.

(1) 本题用单调性做

$$f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x},\quad x\in[0,+\infty),$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}>0,\quad x\in(0,+\infty),$$

则 $f(x)$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上单调增加，即对任意 $x>0$，$f(x)>f(0)=0$，从而对任意 $x>0$，$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$.

(2) 令 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，而且

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{1-1+x^2}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}>0\ (x>0),$$

因而 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)$，所以

$$\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}>0(x>0)，因而\ \ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}(x>0).$$

另一方面，取 $g(x)=\ln(1+x)-x$，则 $g'(x)=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}<0$，$g(x)=\ln(1+x)-x$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少，当 $x>0$ 时，$g(x)<g(0)=0$，即 $\ln(1+x)<x$. 所以有 $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x,\ x>0$.

(3) 设 $f(x)=e^x-ex$，则 $f'(x)=e^x-e$.

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)>f(1)=0$，即当 $x>1$ 时，$e^x>ex$.

6. 试问 a 为何值时，$f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值？是极大值还是极小值？并求出此极值.

解 $f'(x)=a\cos x+\cos 3x$，因在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取极值，则 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=a\cos\frac{\pi}{3}-\cos\pi=\frac{1}{2}a-1=0$，于是得 $a=2$. 且 $f''(x)=-2\sin x-3\sin 3x$，故 $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\sin\frac{\pi}{3}-3\sin\pi=-\sqrt{3}<0$，函数 $f(x)=2\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极大值，极大值为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$.

提高题

1. 证明 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

证明 令 $\varphi(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2,x>0$，则

$$\varphi'(x)=2x\ln x-x+2-\frac{1}{x},\quad \varphi'(1)=0;\quad \varphi''(x)=2\ln x+1+\frac{1}{x^2},\quad \varphi''(1)=2>0;$$

$$\varphi'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3}.$$

当 $0<x<1$ 时，$\varphi'''(x)<0$；当 $1<x<+\infty$ 时，$\varphi'''(x)>0$. 故 $\varphi''(1)$ 为 $\varphi''(x)$ 极小值也是最小值，因而当 $x>0$ 时，$\varphi''(x)\geqslant\varphi''(1)=2>0$. 故 $\varphi'(x)$ 单调增加. 由 $\varphi'(1)=0$ 得 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$；当 $1<x<+\infty$ 时，$\varphi'(x)>0$. 因此 $\varphi(1)=0$ 是 $\varphi(x)$ 的最小值，得 $x>0$ 时，$\varphi(x)\geqslant\varphi(1)=0$，即 $(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

2. 设 $x>0$ 时，方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个实根，求 k 的取值范围.

解 令 $f(x)=kx+\frac{1}{x^2}-1$，则 $f'(x)=k-\frac{2}{x^3}$. 当 $k\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 是减函数，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$，

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\begin{cases}-\infty, & k<0,\\ -1, & k=0,\end{cases}$ 故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一根.

当 $k>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得唯一驻点：$x=\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$，讨论如下：

x	$\left(0,\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right)$	$\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$	$\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}+\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

所以当 $f\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right)=0$ 时，即 $k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一根.

3. 证明方程 $1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}=0$ 无实根.

证明 令 $f(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，则 $f'(x)=-1+x-x^2+x^3=(x-1)(1+x^2)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$. 而 $f''(x)=1-2x+3x^2$， $f''(1)=2>0$.

$f(x)$在 $x=1$ 处取得唯一的极小值，也就是最小值 $f(1)=\frac{5}{12}>0$. $f(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}$的最小值大于零，故方程 $1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}=0$ 无实根.

4. 已知方程$\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=k$ 在区间$(0,1)$内有实根，确定常数 k 的取值范围.

解 设 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$，$x\in(0,1)$，则

$$f'(x)=-\frac{1}{(1+x)\ln^2(1+x)}+\frac{1}{x^2}=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}.$$

令 $g(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$，则 $g(0)=0$，$g(1)=2\ln^2 2-1$.

$$g'(x)=\ln^2(1+x)-2\ln(1+x)-2x,\quad g'(0)=0,$$

$g''(x)=\frac{2(\ln(1+x)-x)}{1+x}<0$，$x\in(0,1)$，所以 $g'(x)$在$(0,1)$上单调减少.

由于 $g'(0)=0$，所以当 $x\in(0,1)$时，$g'(x)<g'(0)=0$，也就是 $g(x)g'(x)$在$(0,1)$上单调减少，当 $x\in(0,1)$时，$g(x)<g(0)=0$，进一步得到当 $x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，也就是 $f(x)$在$(0,1)$上单调减少.

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\frac{1}{2}$，$f(1)=\frac{1}{\ln2}-1$，即$\frac{1}{\ln2}-1<k<\frac{1}{2}$.

5. 已知函数 $y=y(x)$满足关系式 $x^2+y^2y'=1-y'$，且 $y(2)=0$，求 $y(x)$的极大值和极小值.

解 由 $x^2+y^2y'=1-y'$，得 $y'=\frac{1-x^2}{1+y^2}$. 令 $y'=\frac{1-x^2}{1+y^2}=0$，得 $x-1$，$x=-1$.

由$(1+y^2)y'=1-x^2$，得 $y+\frac{1}{3}y^3=x-\frac{1}{3}x^3+C$；由 $y(2)=0$ 得 $C=\frac{2}{3}$，故 $y+\frac{1}{3}y^3=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}$.

当 $x=1$ 时，可解得 $y=1$，$y''=-1<0$，函数取得极大值 $y=1$；

当 $x=-1$ 时，可解得 $y=0$，$y''=2>0$，函数取得极小值 $y=0$.

6. 设 $f(x)$是二次可微的函数，满足 $f(0)=-1$，$f'(0)=0$，且对任意的 $x\geqslant0$，有 $f''(x)-3f'(x)+2f(x)\geqslant0$，证明：对每个 $x\geqslant0$，都有 $f(x)\geqslant e^{2x}-2e^2$.

证明 首先$[f''(x)-f'(x)]-2[f'(x)-f(x)]\geqslant0$，令 $F(x)=f'(x)-f(x)$，则

$$F'(x)-2F(x)\geqslant0,\quad 因此[F(x)e^{-2x}]'\geqslant0.$$

所以 $F(x)e^{-2x}\geqslant F(0)=1$，或者 $f'(x)-f(x)\geqslant e^{2x}$.

进一步有$[f(x)e^{-x}]'\geqslant e^x$，即$[f(x)e^{-x}-e^x]'\geqslant0$，所以 $f(x)e^{-x}-e^x\geqslant f(0)-1=-2$，故 $f(x)\geqslant e^{2x}-2e^x$.

7. 设函数 $y=y(x)$由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 所确定，试求 $y=y(x)$的驻点，并判断是否为极值点.

解 将方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 两边同时对 x 求导，得

$$6y^2y'-4yy'+2y+2xy'-2x=0,\tag{1}$$

两边再同时对 x 求导，得

$$12yy'+6y^2y''-4(y')^2-4yy''+2y'+2y'+2xy''-2=0.\tag{2}$$

将 $y'=0$ 代入(1)式中，得

$$y=x.\tag{3}$$

将(3)式代入原方程中，得 $y=x=1$，将 $y'(1)=0$，$y(1)=1$ 代入(2)式中得 $y''(1)=\frac{1}{2}$，所以 $y=y(x)$的驻点为 $x=1$，$(1,1)$为极小值点.

习题 3.5

1. 求下列函数的最大值和最小值：

(1) $f(x)=2x^3-3x^2$，$x\in[-1,4]$；　　(2) $f(x)=x+\sqrt{1-x}$，$x\leqslant\in[-5,1]$；

(3) $f(x)=x^4-2x^2+5$，$x\in[-2,2]$.

解 (1) $f'(x)=6x^2-6x$. 令 $f'(x)=6x(x-1)=0$,得驻点 $x=0,x=1$.

$$f(-1)=-5,\quad f(0)=0,\quad f(1)=-1,\quad f(4)=80,$$

则 $f(x)$在$[-1,4]$上的最小值为 $f(-1)=-5$,最大值为 $f(4)=80$.

(2) $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}$. 令 $f'(x)=0$ 解得驻点为 $x=\dfrac{3}{4}$.

$$f(-5)=-5+\sqrt{6},\quad f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4},\quad f(1)=1,$$

则 $f(x)$在$[-5,1]$上的最小值为 $f(-5)=-5+\sqrt{6}$,最大值为 $f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{5}{4}$.

(3) $f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)$. 令 $f'(x)=0$,得驻点 $x=0,x=\pm1$.

$$f(\pm1)=4,\quad f(0)=5,\quad f(\pm2)=13.$$

则 $f(x)$在$[-2,2]$上的最小值为 $f(\pm1)=4$,最大值为 $f(\pm2)=13$.

2. 问函数 $y=x^2-\dfrac{54}{x}(x<0)$在何处取得最小值?

解 取 $y'=2x+\dfrac{54}{x^2}=0$,得 $x=-3$.

当 $x<-3$ 时,$y'<0$;当 $x>-3$ 时,$y'>0$. 故 $x=-3$ 为 $y=x^2-\dfrac{54}{x}(x<0)$唯一的极小值点,也为最小值点. 最小值为 $y(-3)=27$.

3. 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋,现有存砖只够砌 20m 长的墙壁,问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大?

解 设长方形的宽为 x,则长为 $20-2x$,面积

$$y=x(20-2x),\quad x\in(0,10).$$

$y'=20-4x$. 令 $y'=0$,得 $x=5$,且 $y''=-4<0$,故 $x=5$ 为 $y=x(20-2x)$唯一极大值点,所以为最大值点. 最大值为 $y(5)=50\text{m}^2$.

4. 要造一个圆柱形的储油罐,体积为 V,问底半径 r 和高 h 等于多少时,才能使表面积最小? 这时底直径与高的比是多少?

解 $V=\pi r^2h$,故 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$.

$$S=2\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{V}{\pi r^2}=2\left(\pi r^2+\frac{V}{r}\right),\quad S'=4\pi r-\frac{2V}{r^2}.\text{ 取 } S'=0 \text{ 得 } r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

而 $S''=4\pi+\dfrac{4V}{r^3}>0$,则 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$时表面积取最小值,这时 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$,$h=2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

5. 一房地产公司有 50 套公寓要出租,当月租金定位 1000 元时,公寓会全部租出去. 当月租金每套增加 50 元时,就会多一套公寓租不出去,而租出去的公寓每月需花费 100 元维修费. 试问房租定位多少时可获得最大收入.

解 设有 x 套公寓租不出去,则房租为 $1000+50x$ 元,总收入为 y 元,此时租出公寓 $50-x$ 套,则

$$y=(1000+50x)(50-x)-100(50-x)=(900+50x)(50-x),\quad 0\leqslant x\leqslant 50$$

$$y'=50(50-x)+(900+50x)(-1)=2500-50x-900-50x=1600-100x.$$

令 $y'=0$,得 $x=16$,且 $y''=-100<0$,故 y 在唯一驻点处取得极大值,因而也是最大值. 当 $x=16$,即租

出 34 套公寓，房租定为 1800 元时，总收入最大.

6. 用一块半径为 R 的圆形铁皮，剪去一圆心角为 α 的扇形后，做成一个漏斗形容器，问 α 为何值时，容器的容积最大?

解 设余下部分的圆心角为 φ 时所卷成的漏斗容积 V 最大，漏斗的底半径为 r，高为 h，则 $2\pi r=R\varphi$，$h=\sqrt{R^2-r^2}$，$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{\pi}{3}r^2\sqrt{R^2-r^2}$. 令 $V'=\frac{\pi}{3}2r\sqrt{R^2-r^2}+\frac{\pi}{3}r^2\frac{-r}{\sqrt{R^2-r^2}}=0$，得 $r=\frac{\sqrt{6}}{3}R$，此时 $\varphi=\frac{2\pi r}{R}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$，即当余下的圆心角为 $\varphi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时漏斗容积最大.

提高题

1. 求内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 而面积最大的矩形各边之长.

解 设 $M(x,y)$ 为椭圆上第一象限内任意一点，则以点 M 为一顶点的内接矩形的面积为

$$S(x)=2x\cdot 2y=\frac{4b}{a}x\sqrt{a^2-x^2},\quad 0\leqslant x\leqslant a,$$

且 $S(0)=S(a)=0$. $S'(x)=\frac{4b}{a}\left[\sqrt{a^2-x^2}+x\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]=\frac{4b}{a}\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

由 $S'(x)=0$，求得驻点 $x_0=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 为唯一的极值可疑点. 依题意，$S(x)$ 存在最大值，故 $x_0=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 是 $S(x)$ 的最大值点，最大值为 $S_{\max}=\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}=2ab$，对应的 y 值为 $\frac{b}{\sqrt{2}}$，即当矩形的边长分别为 $\sqrt{2}a$，$\sqrt{2}b$ 时面积最大.

习题 3.6

1. 某产品的成本函数为 $C(Q)=15Q-6Q^2+Q^3$.

(1) 生产数量为多少时，可使平均成本最小?

(2) 求出边际成本，并验证边际成本等于平均成本时平均成本最小.

解 (1) $\overline{C(Q)}=\frac{C(Q)}{Q}=15-6Q+Q^2$，取 $(\overline{C(Q)})'=-6+2Q=0$，得 $Q=3$，$(\overline{C(Q)})''=2>0$. 当 $Q=3$ 时，平均成本最小.

(2) $C'(Q)=15-12Q+3Q^2$. 由 $15-12Q+3Q^2=15-6Q+Q^2$，得 $2Q^2-6Q=0$，即 $Q=0$(舍去)，$Q=3$.

2. 已知某厂生产 Q 件产品的成本为 $C(Q)=25000+2000Q+\frac{1}{40}Q^2$(元). 问:

(1) 要使平均成本最小，应生产多少件产品?

(2) 若产品以每件 5000 元售出，要使利润最大，应生产多少件产品?

解 (1) 由 $\overline{C(Q)}=\frac{25000}{Q}+2000+\frac{Q}{40}=2000+\frac{Q}{20}$，得 $\frac{25000}{Q}=\frac{Q}{40}$，即 $Q^2=400\times 2500$，从而得 $Q=20\times 50=1000$. 当 $Q=1000$ 时，平均成本最小.

(2) $L=R(Q)-C(Q)=PQ-C(Q)=5000Q-25000-2000Q-\frac{1}{40}Q^2$.

取 $L'=3000-\frac{1}{20}Q=0$，得 $Q=60000$. 而 $L''=-\frac{1}{20}$，故当 $Q=60000$ 时，L 最大.

3. 设某商品的需求函数和成本函数分别为 $P+0.1x=80$，$C(x)=5000+20x$，其中 x 为销售量(产量)，P 为价格. 求边际利润函数，并计算 $x=150$ 和 $x=400$ 时的边际利润，解释所得结果的经济意义.

解 $L(x)=R(x)-C(x)=(80-0.1x)x-(5000+20x)$，

$L'(x)=60-0.2x$，　$L'(150)=60-0.2\times 150=30$，　$L'(400)=60-0.2\times 400=-20$.

当 $x=150$ 时,产量每增加一个单位利润增加 30 个单位;当 $x=400$ 时,产量每增加一个单位利润减少 20 个单位.

4. 某厂每批生产 x 单位产品的费用为 $C(x)=5x+200$,得到的收益是 $R(x)=10x-0.01x^2$,问每批生产多少单位时才能获得最大利润?

解 $L(x)=R(x)-C(x)=10x-0.01x^2-5x-200=-0.01x^2+5x-200$,$L'(x)=5-0.02x$.

令 $L'(x)=0$,得 $x=250$,且 $L''(x)=-0.02<0$,故在 $x=250$ 处取得最大利润.

5. 某工厂生产某种产品,日总成本为 C 元,其中固定成本为 200 元,每多生产一个单位产品,成本增加 10 元,该商品的需求函数为 $Q=50-2P$,求 Q 为多少时,工厂日总利润最大?

解 $C(Q)=200+10Q$,

$$L(P)=R(P)-C(P)=QP-200-10(50-2P)=(50-2P)P-10(50-2P)-200.$$

令 $L'(P)=70-4P=0$,得 $P=\frac{70}{4}$. 而 $L''(P)=-4<0$,故在 $P=\frac{70}{4}$处,$Q=50-2\times\frac{70}{4}=15$,利润取得最大值.

6. 设某种商品的销售额 Q 是价格 P(单位:元)的函数,$Q=f(P)=300P-2P^2$.

分别求价格 $P=50$ 元及 $P=120$ 元时,销售额对价格 P 的弹性,并说明其经济意义.

解 $\frac{EQ}{EP}=\frac{P}{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=\frac{P}{300P-2P^2}\cdot(300-4P)$.

当 $P=50$ 时,$\frac{EQ}{EP}=\frac{1}{2}$,这说明当 $P=50$ 时,价格增加 1%,需求增加 0.5%.

当 $P=120$ 时,$\frac{EQ}{EP}=-3$,这说明当 $P=120$ 时,价格增加 1%,需求减少 3%.

提高题

1. 设生产某产品的平均成本 $\overline{C}(Q)=1+\mathrm{e}^{-Q}$,其中产量为 Q,求边际成本.

解 $C(Q)=Q\overline{C(Q)}=Q(1+\mathrm{e}^{-Q})$,故 $C'(Q)=1+(1-Q)\mathrm{e}^{-Q}$.

2. 某个体户以每条 10 元的价格购进一批牛仔裤,设此批牛仔裤的需求函数为 $Q=40-2P$,问该个体户应将销售价定为多少时,才能获得最大利润?

解 $L=QP-10Q=(40-2P)P-10(40-2P)=-2P^2+60P-400$,且 $L'=-4P+60=0$,即 $P=15$.

$L''=-4<0$,故取最大值,即当 $P=15$ 时,获利最大.

3. 设 $f(x)=cx^\alpha(c>0,0<\alpha<1)$为一生产函数,其中 c 为效率因子,x 为投入量,产品的价格 P 与原料价格 Q 均为常量,问:投入量为多少时可使利润最大?

解 $L=PCx^\alpha-Qx$. 取 $L'=PC\alpha x^{\alpha-1}-Q=0$,得 $x=\sqrt[\alpha-1]{\frac{Q}{PC\alpha}}$.

4. 某商品的需求弹性在 1.5~2.0 之间,现打算将该商品的价格下调 12%,那么明年该商品的需求量和总收益将如何变化?变化多少?

解 $\frac{\Delta Q}{Q}=1.5\times12\%=18\%$,$\frac{\Delta R}{R}=(1-1.5)\times(-12\%)=6\%$,

$\frac{\Delta Q}{Q}=2.0\times12\%=24\%$,$\frac{\Delta R}{R}=(1-2.0)\times(-12\%)=12\%$,

即需求量增加 18%~24%,总收益增加 6%~12%.

习题 3.7

1. 讨论下列函数的凸性,并求曲线的拐点:

(1) $y=x^2-x^3$; (2) $y=\ln(1+x^2)$; (3) $y=x\mathrm{e}^x$;

(4) $y=(x+1)^4+\mathrm{e}^x$; (5) $y=\frac{x}{(x+3)^2}$; (6) $y=\mathrm{e}^{\arctan x}$.

解 (1) $y'=2x-3x^2, y''=2-6x$. 令 $y''=0$,得 $x=\frac{1}{3}$.

当 $x<\frac{1}{3}$ 时,$y''>0$;当 $x>\frac{1}{3}$ 时,$y''<0$. 所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ 是上凸的,在 $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$ 下凸,拐点为 $\left(\frac{1}{3},y\left(\frac{1}{3}\right)\right)$,即 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{27}\right)$.

(2) $y'=\frac{2x}{1+x^2}, y''=\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$. 令 $y''=0$,得 $x=\pm 1$.

当 $x>1$ 或 $x<-1$ 时,$y''\leqslant 0$;当 $-1<x<1$ 时,$y''>0$. 故函数在 $(1,+\infty)$,$(-\infty,-1)$ 内上凸;在 $[-1,1]$ 内下凸. 拐点为 $(1,\ln 2)$,$(-1,\ln 2)$.

(3) $y'=e^x+xe^x, y''=e^x+e^x+xe^x=(x+2)e^x$. 令 $y''=0$,得 $x=-2$.

当 $x<-2$ 时,$y''<0$;当 $x>-2$ 时,$y''>0$. 故函数的上凸区间为 $(-\infty,-2)$,下凸区间为 $(-2,+\infty)$,拐点为 $(-2,-2e^{-2})$.

(4) $y'=4(x+1)^3+e^x$, $y''=12(x+1)^2+e^x>0$, $y=(x+1)^4+e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上下凸,没有拐点.

(5) $y'=\frac{1}{(x+3)^2}-\frac{2x}{(x+3)^3}=\frac{3-x}{(x+3)^3}$, $y''=\frac{-2}{(x+3)^3}-\frac{2}{(x+3)^3}+\frac{6x}{(x+3)^4}=\frac{6x-4}{(x+3)^4}$. 令 $y''=0$ 得 $x=\frac{2}{3}$.

当 $x<-3$ 时,$y''<0$;当 $-3<x<\frac{2}{3}$,$y''<0$;当 $x>\frac{2}{3}$ 时,$y''>0$. 曲线 $y=\frac{x}{(x+3)^2}$ 在 $(-\infty,-3)$,$\left(-3,\frac{2}{3}\right)$ 上上凸,在 $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$ 上下凸.

(6) $y'=e^{\arctan x}\frac{1}{1+x^2}$, $y''=e^{\arctan x}\frac{1-2x}{(1+x^2)^2}$. 令 $y''=0$ 得 $x=\frac{1}{2}$.

当 $x<\frac{1}{2}$ 时,$y''>0$;当 $x>\frac{1}{2}$ 时,$y''<0$. 曲线 $y=e^{\arctan x}$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 上下凸,在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上上凸.

2. 利用函数的凸性证明下列不等式:

(1) $\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$, $x\neq y$;　　(2) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$, $x>0, y>0, x\neq y$.

证明 (1) 令 $f(x)=e^x$,则 $f''(x)=e^x>0$,故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格下凸的,从而有

$f(tx_1+(1-t)x_2)<tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$. 令 $x_1=x, x_2=y, t=\frac{1}{2}$,得

$f\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)<\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)$,即 $e^{\frac{x+y}{2}}<\frac{e^x+e^y}{2}$, $x\neq y$.

(2) 令 $f(x)=x\ln x$,则 $f'(x)=\ln x+1, f''(x)=\frac{1}{x}>0$,故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格下凸的,从而有 $f(tx_1+(1-t)x_2)<tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$.

令 $x_1=x, x_2=y, t=\frac{1}{2}$,得 $f\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)<\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)$, $x\neq y$,于是

$$\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}<\frac{1}{2}x\ln x+\frac{1}{2}y\ln y,\text{即 } x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}, x\neq y.$$

3. 当 a,b 为何值时,点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点.

解 因为点 $(1,3)$ 在曲线 $y=ax^3+bx^2$ 上,故得 $a+b=3$.

又 $(1,3)$ 为 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点,而 $y'=3ax^2+2bx, y''=6ax+2b$,所以 $6a+2b=0\Rightarrow a=-\frac{3}{2}, b=\frac{9}{2}$.

4. 求下列曲线的渐近线:

(1) $y=\ln x$;　　(2) $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$;　　(3) $y=\frac{x}{3-x^2}$;　　(4) $y=\frac{x^2}{2x-1}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$,所以没有水平渐近线;$\lim\limits_{x\to0^+} y=\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$,故 $x=0$ 为铅直渐近线;$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$,所以没有斜渐近线;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=0$,所以 $y=0$ 为水平渐近线;没有铅直渐近线;$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=0$,所以没有斜渐近线;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{3-x^2}=0$,所以 $y=0$ 为水平渐近线;$\lim\limits_{x\to\pm\sqrt{3}} y=\lim\limits_{x\to\pm\sqrt{3}}\dfrac{x}{3-x^2}=\infty$,故 $x=\pm\sqrt{3}$ 为铅直渐近线;$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{(3-x^2)x}=0$,所以没有斜渐近线;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x-1}=\infty$,所以没有水平渐近线;$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} y=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{x^2}{2x-1}=\infty$,故 $x=\dfrac{1}{2}$ 为铅直渐近线;$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{(2x-1)x}=\dfrac{1}{2}$,$\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{2x-1}-\dfrac{1}{2}x\right)=\dfrac{1}{4}$,所以 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}$ 为斜渐近线.

5. 作图题(略).

提高题

1. 曲线 $y=x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线为________.

解 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)=1$,

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-ax)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\arcsin\dfrac{2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{2}{x}=2$,

故斜渐近线为 $y=x+2$.

2. 求曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程.

解 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)}{x}=1$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)-x\right]=\dfrac{\pi}{2}$.

故斜渐近线为 $y=x+\dfrac{\pi}{2}$.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其中二阶导数 $f''(x)$ 的图形如图 3-2 所示,则曲线 $y=f(x)$ 的拐点的个数为( ).

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解 $f''(x)$ 正负的分界点有两个,所以拐点有两个,故选 C.

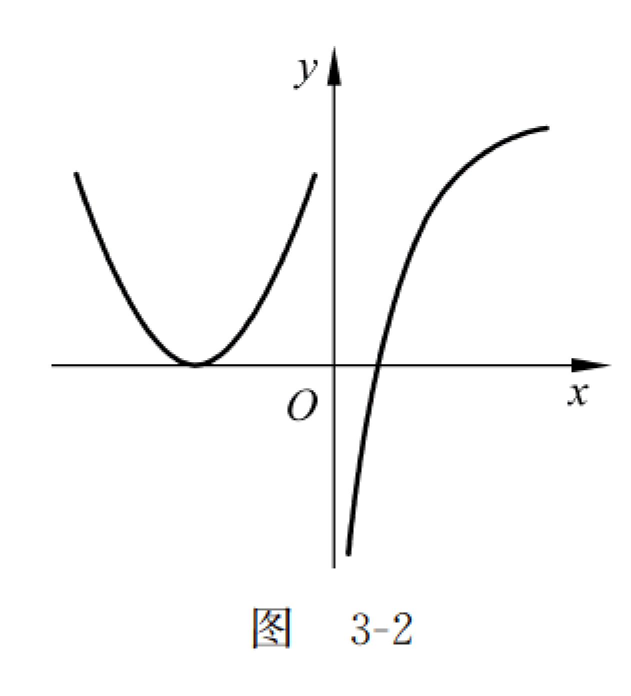


图 3-2

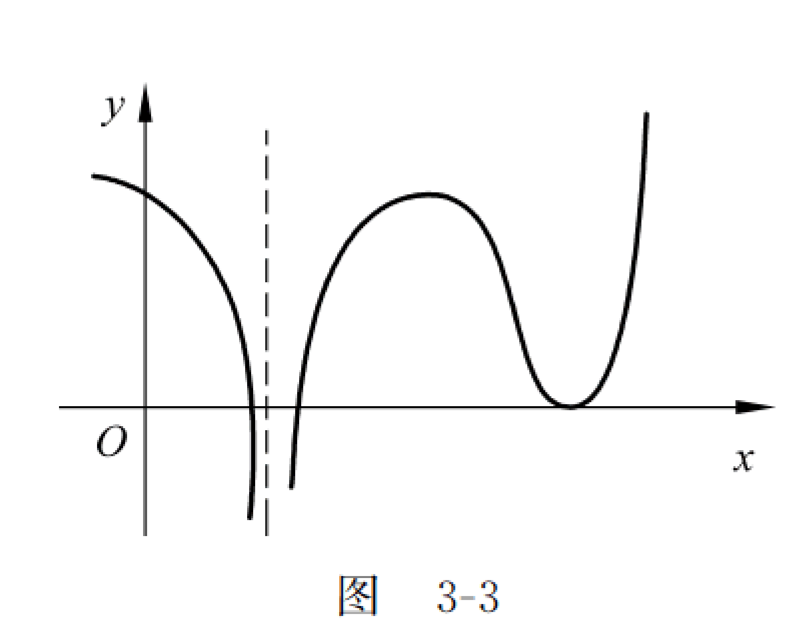


图 3-3

4. 设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其导函数的图形如图 3-3 所示,则( ).

A. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

B. 函数 $f(x)$有2个极值点，曲线 $y=f(x)$有3个拐点

C. 函数 $f(x)$有3个极值点，曲线 $y=f(x)$有1个拐点

D. 函数 $f(x)$有3个极值点，曲线 $y=f(x)$有2个拐点

解 $f'(x)$的正负分界点有2个，所以有2个极值点. $f'(x)$单调减少单调增加的分界点有3个，所以有3个拐点，故选B.

5. 曲线$\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$的斜渐近线方程是：________.

解 当 $t\to-1$ 时，$x\to\infty$，$y\to\infty$，设斜渐近线为 $y=ax+b$.

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1}\frac{\dfrac{3t^2}{1+t^3}}{\dfrac{3t}{1+t^3}}=\lim_{t\to-1}t=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{t\to-1}\left(\frac{3t^2}{1+t^3}+\frac{3t}{1+t^3}\right)=\lim_{t\to-1}\frac{3t(t+1)}{1+t^3}=\lim_{t\to-1}\frac{3t}{1-t+t^2}=-1.$$

故斜渐近线为 $y=-x-1$.

6. 设函数 $f(x)$满足关系 $f''(x)=x-(f'(x))^2$，且 $f'(0)=0$，证明：点$(0,f(0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

证明 由关系式 $f''(x)=x-(f'(x))^2$，令 $x=0$，得 $f''(0)=0$.

等式两端求导，得 $f'''(x)=1-2f'(x)f''(x)$，因此 $f'''(0)=1$.

再由 $f'''(x)$的连续性可知，在 $x=0$ 附近，$f'''(x)>0$，所以 $f''(x)$单增，$f''(x)$在 $x=0$ 的两侧异号，故点$(0,f(0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

复习题3

1. 填空题

(1) 设 $f(x)=x^2$，则在 $x,x+\Delta x$ 之间满足拉格朗日中值定理结论的 $\xi=$________.

(2) 设函数 $g(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)内可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $e^{g(b)}-e^{g(a)}=$________成立.

(3) $f(x)=x^n e^{-x}(n>0,x\geqslant0)$的单增区间是________，单减区间是________.

(4) 若点$\left(1,\dfrac{4}{3}\right)$为曲线 $y=ax^3-x^2+b$ 为拐点，则 $a=$________，$b=$________.

(5) 曲线 $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$的水平渐近线为________，铅直渐近线为________.

解 (1) $f'(\xi)=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$，

而 $f'(x)=2x$，故得 $2\xi=2x+\Delta x$，则 $\xi=x+\dfrac{\Delta x}{2}$.

(2) 令 $f(x)=e^{g(x)}$，则 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，即 $e^{g(b)}-e^{g(a)}=e^{g(\xi)}g'(\xi)(b-a)$.

(3) 令 $f'(x)=nx^{n-1}e^{-x}-x^n e^{-x}=e^{-x}x^{n-1}(n-x)=0$，则得 $x=0,x=n$. 当 $0<x<n$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>n$ 时，$f'(x)<0$. 故 $f(x)$在$[0,n)$上单调递增，在$[n,+\infty)$上单调递减.

(4) $y'=3ax^2-2x$，$y''=6ax-2$. 根据题意有 $a-1+b=\dfrac{4}{3}$，$y''(1)=6a-2=0$. 解得 $a=\dfrac{1}{3}$，$b=2$.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=1$，所以 $y=1$ 为水平渐近线；$\lim\limits_{x\to-1^-}y=\lim\limits_{x\to-1^-}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=\infty$，所以 $x=-1$ 为铅直渐近线. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}{x}=0$，所以没有斜渐近线.

2. 选择题

(1) 在$[-1,1]$上满足罗尔定理的条件的函数是(　　).

A. $\ln|x|$　　B. e^x　　C. $1-x^2$　　D. $\dfrac{2}{1-x^2}$

(2) 正确应用洛必达法则求极限的式子是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{e^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{e^x}=0$

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)$不存在

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\cot x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$

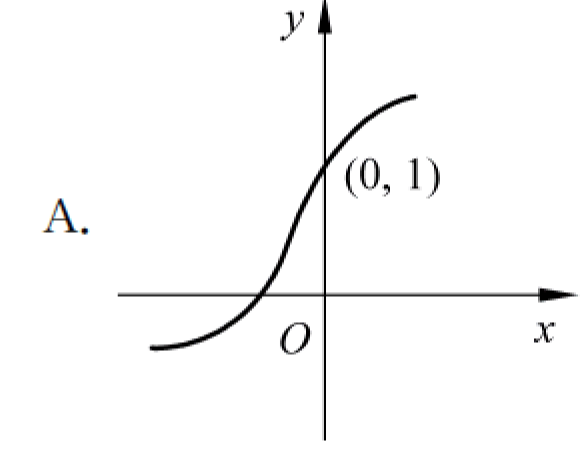
D. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^{2x}}{2e^{2x}}=1$

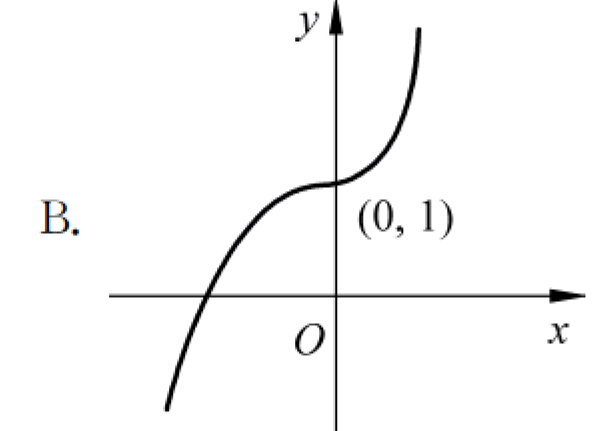
(3) 方程 $e^x-x-1=0$(　　).

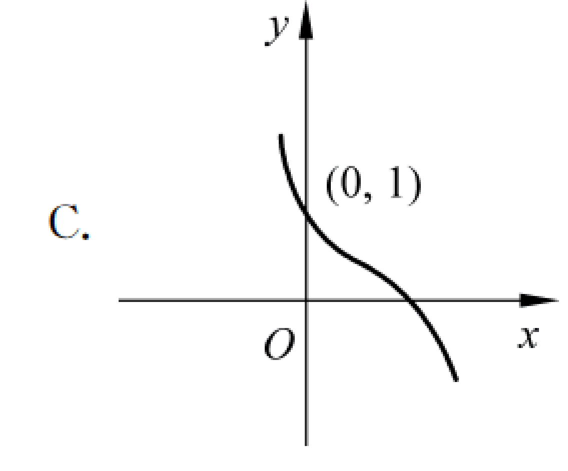
A. 没有实根　　B. 有且仅有一个实根

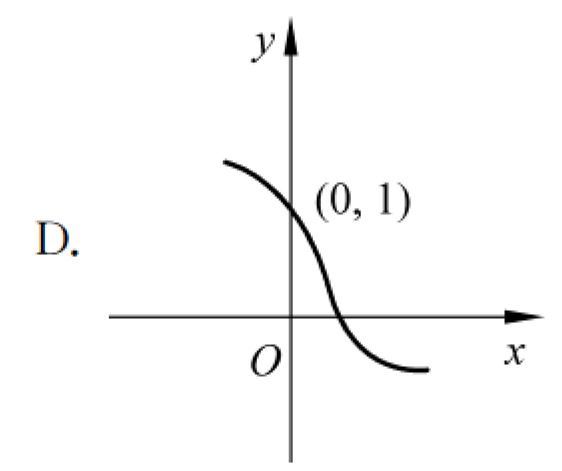
C. 有且仅有两个实根　　D. 有三个不同实根

(4) 函数 $y=f(x)$具有下列特征:$f(0)=1,f'(0)=0$,当 $x\neq 0$ 时,$f'(x)>0,f''(x)=\begin{cases}<0, & x<0,\\ >0, & x>0,\end{cases}$则其图形为(　　).

A.


B.


C.


D.


(5) 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,$f(a)=f(b)$,且 $f(x)$不恒为常数,则在(a,b)内(　　).

A. 必有最大值或最小值　　B. 既有极大值又有极小值

C. 既有最大值又有最小值　　D. 至少存在一点 ξ,使 $f'(\xi)=0$

解 (1) $\ln|x|$在 $x=0$ 处无定义,更谈不上在$[-1,1]$上连续,不满足罗尔定理条件;

$e^{-1}\neq e^1$,不满足罗尔定理条件;

$y=1-x^2$ 在$[-1,1]$上连续,在$(-1,1)$内可导,$1-(-1)^2=1-1^2$,满足罗尔定理条件;

$y=\dfrac{2}{1-x^2}$在 $x=-1,x=1$ 处没有定义,更谈不上在$[-1,1]$上连续,不满足罗尔定理条件;

故选 C.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{e^x}$已经不是未定式了,而是分子趋于 1,分母趋于 1;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)=2$;

C 正确;　　D 只对 $x\to+\infty$成立,对 $x\to-\infty$不成立;

故选 C.

(3) $f(x)=e^x-x-1$，由 $f'(x)=e^x-1=0$，得 $x=0$.

当 $x<0$ 时，$f'(x)=e^x-1<0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调减少；当 $x>0$ 时，$f'(x)=e^x-1>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加．而 $f(0)=0$，故 $f(x)=e^x-x-1$ 在 $x=0$ 处取得唯一极小值 0，也是最小值．所以 $e^x-x-1=0$ 有且仅有一个根 $x=0$.

故选 B.

(4) B.

(5) 没说可导，故选 A.

3．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\ln(1+x^2)}$；　(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x$；　(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^{2x}-1}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$；　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解　(1) 原式 $\xlongequal{\frac{0}{0}\text{型}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2(1+x)}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 解法一　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}\ln(1+2x)}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{2}\ln(1+2x)}\left(e^{x-\frac{1}{2}\ln(1+2x)}-1\right)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{2}\cdot 2x}\left(x-\dfrac{1}{2}\ln(1+2x)\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\dfrac{1}{2}\ln(1+2x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{1+2x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2+4x-2}{2(1+2x)}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{4x(1+2x)}=1.$$

解法二　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}\ln(1+2x)}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{2}\ln(1+2x)}\left(e^{x-\frac{1}{2}\ln(1+2x)}-1\right)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{2}\cdot 2x}\left(x-\dfrac{1}{2}\ln(1+2x)\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\dfrac{1}{2}\ln(1+2x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\ln(1+2x)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2}(2x)^2}{2x^2}=1.$$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{-2\cos x}{-3\sin 3x}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\arctan x}{\dfrac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2\cdot\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{(\ln x)^2}\cdot\dfrac{1}{x}}=2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(\ln x)^2}{1+x^2}$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2+x\ln x\cdot\dfrac{1}{x}}{2x}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2+\ln x}{2x}$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+1}{2x}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2x}=0.$$

(5) 解法一　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$　$(\ln(1+x)\sim x)$

$$\overset{\frac{0}{0}\text{型}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}\text{(通分)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{2x}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}.$$

解法二 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$

(6) 解法一 利用洛必达法则.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^{2x}-1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1-x}{x(e^{2x}-1)}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1-x}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2e^{2x}-1}{4x}\left(\frac{1}{0}\text{ 型}\right)=\infty.$$

解法二 利用等价无穷小.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^{2x}-1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1-x}{x(e^{2x}-1)}=\lim_{x\to0}\frac{2x-x}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2x}=\infty.$$

(7) 属于 1^∞ 型.

解法一 $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{x}}=e^0=1.$

解法二 $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{x}}=e^0=1.$

(8) 利用泰勒公式

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4),\quad e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4),$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{2}{24}x^4+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$

注 (1) $o(x^4)\pm o(x^4)=o(x^4)$.

(2) 此题用洛必达法则会麻烦.

4. 证明:(1) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,有 $\tan x+2\sin x>3x$ 成立;

(2) 若 $x>0$,则 $e^x>1+x$;

(3) 设 $x>0$,则 $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$.

证明 (1) 令 $f(x)=\tan x+2\sin x-3x, 0<x<\frac{\pi}{2}$.

$f'(x)=\sec^2 x+2\cos x-3$, $\quad f''(x)=2\sec^2 x\tan x-2\sin x=2\sin x\left(\frac{1}{\cos^3 x}-1\right)>0,\ 0<x<\frac{\pi}{2}$.

则 $f'(x)=\sec^2 x+2\cos x-3$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调增加. 故对于任意 $0<x<\frac{\pi}{2}$, $f'(x)=\sec^2 x+2\cos x-3>f'(0)=0$. 则 $f(x)=\tan x+2\sin x-3x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调增加. 对于任意 $0<x<\frac{\pi}{2}$, $f(x)=\tan x+2\sin x-3x>f(0)=0$,即有 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,$\tan x+2\sin x>3x$.

(2) 令 $F(x)=e^x-1-x$,则 $F'(x)=e^x-1$. 当 $x>0$ 时,$F'(x)>0$,从而 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单增, 因为 $F(0)=0$,故 $F(x)>0$,即 $e^x>1+x$.

(3) 令 $f(x)=x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x)$,则 $f'(x)=1-x-\frac{1}{1+x}=\frac{-x^2}{1+x}$. 因 $x>0$,则 $f'(x)<0$,从而 $f(x)$ 在

$(0,+\infty)$单减. 故 $f(x)<f(0)=0$,即 $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)$.

令 $g(x)=\ln(1+x)-x$,则 $g'(x)=\frac{1}{1+x}-1$. 当 $x>0$ 时,$g'(x)<0$,从而 $g(x)$在$(0,+\infty)$单减,故 $g(x)<g(0)=0$,即 $\ln(1+x)<x$.

综上可知,$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$.

5. 求函数 $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$的极值与单调区间.

解 $y'=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5x-2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$.

当 $x=\frac{2}{5}$时,$y'=0$;当 $x=0$ 时,y'不存在.

当 $x<0$ 时,$y'>0$,故$(-\infty,0)$为单增区间;当 $0<x<\frac{2}{5}$时,$y'<0$,故$\left[0,\frac{2}{5}\right)$为单减区间;当 $x>\frac{2}{5}$时,$y'>0$,故$\left[\frac{2}{5},+\infty\right)$为单增区间.

于是得,当 $x=0$ 时,$y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$取得极大值 0;当 $x=\frac{2}{5}$时 $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$取得极小值$-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$.

6. 求函数 $y=x^3-3x^2-9x+14$ 的单调区间.

解 $y'=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$.

当 $x<-1$ 时,$y'>0$;当$-1<x<3$ 时,$y'<0$;当 $x>3$ 时,$y'>0$. 故 y 在$(-\infty,-1]$及$[3,+\infty)$单增,在$[-1,3]$单减.

7. 求函数 $y=\frac{\ln^2 x}{x}$的单调区间与极值.

解 $y'=\frac{(2-\ln x)\ln x}{x^2}$. 令 $y'=0$,得 $x=1$ 或 e^2,故可疑极值点为 $1,e^2$.

x	$(0,1)$	1	$(1,e^2)$	e^2	$(e^2,+\infty)$
y'	$-$		$+$		$-$
y	↘	极小值 0	↗	极大值$\frac{4}{e^2}$	↘

8. 求函数 $y=2e^x+e^{-x}$的极值.

解 $y'=2e^x-e^{-x}$. 令 $y'=0$,得 $x=-\frac{1}{2}\ln 2$. 当 $x<-\frac{1}{2}\ln 2$ 时,$y'<0$,从而 y 单减;当 $x>-\frac{1}{2}\ln 2$ 时,$y'>0$,从而 y 单增. 故 $x=-\frac{1}{2}\ln 2$ 时,y 取极小值 0.

9. 函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d(a>0)$的系数满足什么关系时,这个函数没有极值.

解 $y'=3ax^2+2bx+c$. 因 $a>0$,则 y'是开口向上的抛物线,要使 y 没有极值,则必须使 y 在$(-\infty,+\infty)$是单增或单减,即必须满足 $y'>0$ 或 $y'<0$,只有当$(2b)^2-4\cdot 3ac<0$ 时,才能使 $y'>0$ 成立, 即 $b^2<3ac$ 时,y 没有极值.

10. 求函数 $y=x\ln x$ 在$(0,e]$上的最大值与最小值.

解 $y'=\ln x+1$. 令 $y'=0$,得 $x=\frac{1}{e}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$, $y\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$,$y(e)=e$. 故 $y=x\ln x$ 在$(0,e]$上的最大值为 $y(e)=e$,最小值为

$y\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.

11. 求 $y=x^4-2x^3+1$ 的凹凸区间及拐点.

解 $y'=4x^3-6x^2$, $y''=12x^2-12x=12x(x-1)$. 令 $y''=0$,得 $x=0,x=1$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\cup$	拐点$(0,1)$	$\cap$	拐点$(1,0)$	$\cup$

12. 试决定 $y=k(x^2-3)^2$ 中的 k 的值,使曲线的拐点处的法线通过原点.

解 $y'=4kx(x^2-3)$, $y''=12k(x^2-1)$. 令 $y''=0$,得 $x=1$ 或 -1,则拐点为 $(1,4k)$ 及 $(-1,4k)$.

在拐点 $(1,4k)$ 处切线斜率为 $y'(1)=-8k$,从而在拐点 $(1,4k)$ 处法线斜率为 $\frac{1}{8k}$,法线方程为 $y-4k=\frac{1}{8k}(x-1)$,因法线过原点,所以 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$.

在拐点 $(-1,4k)$ 处切线斜率为 $y'(-1)=8k$,法线方程为 $y-4k=-\frac{1}{8k}(x+1)$,因法线过原点,所以 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$. 故 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$ 时,曲线的拐点处的法线通过原点.

13. 判断函数 $y=\frac{x}{1+x}$ 的单调性,并证明 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$ $(a,b\in\mathbf{R})$.

证明 $y'=\frac{1}{(1+x)^2}>0$, $x>0$,故 $y=\frac{x}{1+x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

由于 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$,故 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$.

14. 判定 e^π 及 π^e 哪个大.

【分析】 $b>a\geqslant e$. 比较 a^b 和 b^a 只需比较 $b\ln a$ 和 $a\ln b$,比较 $\frac{\ln a}{a}$ 和 $\frac{\ln b}{b}$. 设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 只需讨论 $f(x)$ 的单调性.

解 令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$,则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ $(x>0)$. 取 $f'(x)=0$,则 $x=e$.

当 $x>e$ 时, $f'(x)<0$,即 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调减少. 从而当 $x>e$ 时,有 $f(x)<f(e)$.

而 $\pi>e$,则 $f(\pi)=\frac{\ln\pi}{\pi}<f(e)=\frac{\ln e}{e}$,于是得

$$\frac{\ln\pi}{\pi}<\frac{\ln e}{e}\Rightarrow e\ln\pi<\pi\ln e\Rightarrow\ln\pi^e<\ln e^\pi\Rightarrow\pi^e<e^\pi.$$

15. 在半径为 R 的球内,求体积最大的内接圆柱体的高.

解 设圆柱体的高为 x,则圆柱体底面圆直径为 $\sqrt{(2R)^2-x^2}$,圆柱体体积

$$V=\pi\left(\frac{\sqrt{(2R)^2-x^2}}{2}\right)^2\cdot x=\frac{\pi}{4}(4R^2x-x^3),\ 0<x<2R.$$

$V'=\frac{\pi}{4}(4R^2-3x^2)$. 令 $V'=0$,得 $x=\frac{2\sqrt{3}R}{3}$.

$V''=-\frac{3\pi}{2}x<0(x>0)$,故 $V''\left(\frac{2\sqrt{3}R}{2}\right)<0$, $x=\frac{2\sqrt{3}R}{3}$ 为 V 的唯一极大值点,因此为最大值点. 即当高 $x=\frac{2\sqrt{3}R}{3}$ 时,内接圆柱体的体积最大.

16. 某工厂生产某产品，年产量为 x 百台，总成本为 c 万元，其中固定成本 2 万元，每生产一百台，成本增加 2 万元，市场上可销售此种商品 300 台，其销售收入

$$R(x)=\begin{cases}6x-x^2+1, & 0\leqslant x\leqslant 3(\text{万元}),\\ 10, & x>3(\text{万元}),\end{cases}$$

问每年生产多少台，总利润最大？

解 设利润函数为 $L(x)$，则

$$L(x)=\begin{cases}6x-x^2+1-(2+2x), & 0\leqslant x\leqslant 3,\\ 10-(2+2x), & x>3,\end{cases}$$

$$L'(x)=\begin{cases}-2x+4, & 0<x<3,\\ -2, & x=3,\\ -2, & x>3.\end{cases}$$

令 $L'(x)=0$，得 $x=2$，且 $L''(2)<0$. 故当 $x=2$ 时利润取得最大值 $L(2)=3$ 万元.

17. 某商品的需求函数为 $Q=80-P^2$，其中 P 为该商品的价格.

(1) 求 $P=4$ 时的需求弹性，并说明其经济意义；

(2) 当 $P=4$ 时的价格上涨 1% 时，总收益将变化百分之几？是增加还是减少？

解 (1) $\dfrac{EQ}{EP}=\dfrac{P}{Q}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=\dfrac{P}{80-P^2}\cdot(-2P)$，$\left.\dfrac{EQ}{EP}\right|_{P=4}=-0.5$，即当 $P=4$ 时，价格增加 1%，需求量降低 0.5%.

(2) $R=QP=P(80-P^2)$，$\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=80-3P^2$，

$$\frac{ER}{EP}=\frac{P}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=\frac{P}{P(80-P^2)}\cdot(80-3P^2)=\frac{80-3P^2}{80-P^2},\qquad \left.\frac{ER}{EP}\right|_{P=4}=0.5.$$

即当 $P=4$ 时，价格增加 1%，总收益增加 0.5%.

18. 求下列函数曲线的渐近线：

(1) $y=\dfrac{x}{1-x^2}$； (2) $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$； (3) $y=\dfrac{x^2}{(1-x)^2}$； (4) $y=\dfrac{x^3}{(1-x)^2}$.

解 (1)水平渐近线：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1-x^2}=0$，故 $y=0$ 为 $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ 的水平渐近线；

铅直渐近线：$\lim\limits_{x\to\pm1}\dfrac{x}{1-x^2}=\infty$，故 $x=1$ 和 $x=-1$ 为 $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ 的铅直渐近线；

斜渐近线：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1-x^2}=0$，故不存在斜渐近线.

(2) 水平渐近线：$\lim\limits_{x\to\infty}xe^{\frac{1}{x^2}}=\infty$，因此没有水平渐近线；

铅直渐近线：$\lim\limits_{x\to0}xe^{\frac{1}{x^2}}=\infty$，故 $x=0$ 为铅直渐近线；

斜渐近线：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{\frac{1}{x^2}}}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}xe^{\frac{1}{x^2}}-x=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^{t^2}-1}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t^2}{t}=0$，故 $y=x$ 为斜渐近线.

(3) 水平渐近线：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{(1-x)^2}=1$，故 $y=1$ 为 $y=\dfrac{x^2}{(1-x)^2}$ 的水平渐近线；

铅直渐近线：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2}{(1-x)^2}=\infty$，故 $x=1$ 为 $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ 的铅直渐近线；

斜渐近线：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^2}{(1-x)^2}}{x}=0$，因此不存在斜渐近线.

(4) 水平渐近线：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{(1-x)^2}=\infty$，故不存在水平渐近线；

铅直渐近线：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3}{(1-x)^2}=\infty$，故 $x=1$ 为 $y=\dfrac{x^3}{(1-x)^2}$ 的铅直渐近线；

斜渐近线：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^3}{(1-x)^2}}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^3}{(1-x)^2}-x\right]=2$，故斜渐近线为 $y=x+2$.

自测题 3 答案

1. (1) 只需要逐个验证，选 B.

(2) $\forall x\in[a,b]$，由 $(x-\xi)f'(x)\geqslant 0$ 得：

当 $a<x<\xi$ 时，$f'(x)\leqslant 0$，当 $\xi<x<b$ 时，$f'(x)\geqslant 0$. 从而有 $f(x)$ 在 ξ 取得唯一极小值，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值为 $f(\xi)$，而 $f(\xi)>0$，所以在 $[a,b]$ 上 $f(x)>0$. 故选 D.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在是 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在的充分条件. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在时 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也可能存在. 故选 B.

(4) D；(5) D.

2. **解** (1) 设 $f(x)=x^5-5x+1$.

一方面，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，$f(-1)=5$，$f(1)=-3$，由零点存在定理，$f(x)=0$ 在 $(-1,1)$ 内至少有一根.

另一方面，$f'(x)=5x^4-5=5(x^4-1)$，当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调减少，所以 $f(x)=0$ 在 $(-1,1)$ 内至多有一根.

所以 $f(x)=0$ 在 $(-1,1)$ 内有且仅有一个实根.

(2) $f'(x)=e^{-x}(1-x)$. 令 $f'(x)=e^{-x}(1-x)=0$ 得驻点 $x=1$. $f(1)=e^{-1}$，$f(2)=2e^{-2}$，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最大值为 e^{-1}.

(3) $y'=3ax^2+2bx+c$，$y''=6ax+2b$. 由题意知

$y(-2)=-8a+4b-2c+d=44$，　$y'(-2)=12a-4b+c=0$，

$y(1)=a+b+c+d=-10$，　$y'(1)=6a+2b=0$.

解得 $a=1$，$b=-3$，$c=-24$，$d=16$.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\arctan x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\arctan x}=0$.

(5) $R(Q)=PQ=10Q-\dfrac{Q^2}{5}$，$R'(Q)=10-\dfrac{2Q}{5}$，$R'(15)=10-\dfrac{2}{5}\times 15=4$.

3. **解** (1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{-2\cos x}{-3\sin 3x}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 5x}{\ln\tan 3x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{5\sec^2 5x}{\tan 5x}}{\dfrac{3\sec^2 3x}{\tan 3x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{5\cdot 3x}{3\cdot 5x}=1$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$；

(4) 令 $y=x^x$，则 $\ln y=x\ln x$. 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=0$，所以原式 $=e^0=1$；

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2^x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+2^x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x+2^x\ln 2}{x^2+2^x}}{1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+2^x\ln 2}{x^2+2^x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2+2^x\ln^2 2}{2x+2^x\ln 2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln^3 2}{2+2^x\ln^2 2}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln^4 2}{2^x\ln^3 2}}=e^{\ln 2}=2$.

4. **证明** (1) $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-a-b}{(x-1)^2}=1-\dfrac{a+b+1}{(x-1)^2}$，故当 $a+b+1>0$ 时，$f'(x)=0$ 有解 $x=$

$1\pm\sqrt{a+b+1}$.

当 $x<1-\sqrt{a+b+1}$时，$f'(x)>0$，从而 $f(x)$单增；当 $1-\sqrt{a+b+1}<x<1+\sqrt{a+b+1}$时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$单减；当 $x>1+\sqrt{a+b+1}$时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$单增. 故 $f(x)$在 $x=1-\sqrt{a+b+1}$处取得极大值.

(2) $f(x)$在$[a,c]$及$[c,b]$上都满足拉格朗日定理条件，则存在 $\alpha\in(a,c)$，$\beta\in(c,b)$，使得

$$f'(\alpha)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(c)}{c-a},\quad f'(\beta)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=-\frac{f(c)}{b-c}.$$

因为 $f(c)>0$，则 $f'(\alpha)>0$，$f'(\beta)<0$.

因 $f(x)$在(a,b)内二阶可导，则 $f'(x)$在$[\alpha,\beta]$上满足拉格朗日定理条件，故至少存在一点 $\xi\in(\alpha,\beta)$，使 $f''(\xi)=\dfrac{f'(\beta)-f'(\alpha)}{\beta-\alpha}<0$.

(3) 设 $f(x)=\tan x-x-\dfrac{1}{3}x^3$，则，

$f'(x)=\sec^2x-1-x^2=\tan^2x-x^2=(\tan x-x)(\tan x+x)$，当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$\tan x+x>0$.

设 $g(x)=\tan x-x$，则 $g'(x)=\sec^2x-1=\tan^2x>0$，$g(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内单调增加，所以 $g(x)>g(0)=0$，从而 $f'(x)>0$，$f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内单调增加，$f(x)>f(0)=0$ 即 $\tan x>x+\dfrac{1}{3}x^3$.

5. **解** 令 $y'=6x^2-12x-18=0$，得驻点 $x=-1$，$x=3$. 令 $y''=12x-12=0$，得 $x=1$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y	增、凸	极大	减、凸	拐点	减、凹	极小	增、凹

极大值为 $y(-1)=17$，极小值为 $y(3)=-47$，拐点为$(-1,15)$.

6. **解** (1) $C(P)=5Q+200=5(100-2P)+200=700-10P$，

$R(P)=QP=(100-2P)P=100P-2P^2$.

(2) $L(P)=QP-C(P)=(100-2P)P-(700-10P)=110P-2P^2-700$，

$L'(P)=110-4P$. 令 $L'(P)=0$，得 $P=27.5$.

又 $L''(P)=-4<0$，故当 $P=27.5$，$Q=45$ 时获得总利润最大.

第 4 章

不定积分

4.1 大纲要求及重点内容

1. 大纲要求

(1) 理解原函数与不定积分的概念;

(2) 会灵活运用不定积分的性质及基本积分公式求不定积分;

(3) 会灵活运用第一类换元积分法求不定积分,会用第二类换元积分法求被积函数含有根式的不定积分;

(4) 会灵活运用分部积分法求不定积分;

(5) 会计算简单有理函数的不定积分.

2. 重点内容

原函数与不定积分的概念;不定积分的换元积分法和分部积分法.

4.2 内容精要

1. 原函数概念

若在某区间 I 上可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$,即对每一 $x\in I$,都有 $F'(x)=f(x)$ 或 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$,则函数 $F(x)$ 称为 $f(x)$ 在该区间上的一个原函数.

2. 不定积分概念

在区间 I 上,$f(x)$ 的所有原函数称为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分,记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$. 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数,则 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$,其中 C 为任意常数.

3. 基本积分公式

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$($k$ 为常数);　　(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C\ (\mu \neq -1)$;

(3) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$;　　(4) $\int \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$;

(5) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$;　　(6) $\int a^x\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C(a>0,且\ a\neq 1)$;

(7) $\int e^x dx = e^x + C$;　(8) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

(9) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;　(10) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$;

(11) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$;　(12) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$;

(13) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$.

4. 不定积分的性质

性质 1　$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$ 或 $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$.

性质 2　$\int F'(x)dx = F(x) + C$ 或 $\int dF(x) = F(x) + C$.

性质 3　两个函数代数和的不定积分，等于它们各自不定积分的代数和，即

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

注　此性质可推广到有限多个函数之和的情形.

性质 4　非零常数因子可提到积分号前面，即

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \ (k \neq 0).$$

5. 求不定积分的基本方法

(1) 第一类换元积分法(凑微分法)

$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx \xlongequal[du = \varphi'(x)dx]{u = \varphi(x)} \int f(u)du$，后一积分对 u 来说容易积分.

(2) 第二类换元积分法　$\int f(x)dx \xlongequal[dx = \phi'(t)dt]{x = \phi(t)} \int f[\phi(t)]\phi'(t)dt$.

① 三角代换　被积函数中含有 $\sqrt{a^2 - x^2}$ 时，设 $x = a\sin t$；被积函数中含有 $\sqrt{a^2 + x^2}$ 时，设 $x = a\tan t$；被积函数中含有 $\sqrt{x^2 - a^2}$ 时，设 $x = a\sec t$.

② 倒代换　如 $\int \frac{dx}{x(x^7 + 2)}$，设 $x = \frac{1}{t}$.

③ 指数代换　如 $\int \frac{2^x dx}{1 + 2^x + 4^x}$，设 $2^x = t$.

④ 简单无理函数　如 $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}dx$，设 $x = t^6$.

(3) 分部积分法

$\int u dv = uv - \int v du$，关键的问题是如何把被积函数分成两部分，分成的两部分应满足：$v = \int dv$ 必须能求出；第二个积分比原积分容易求.

典型的分部积分类型如 $\int x^n \cos x dx$，$\int x^n e^x dx$，$\int x^n \ln x dx$，$\int x \arcsin x dx$，$\int x^2 \arctan x dx$，$\int e^x \cos x dx$ 属于循环积分.

(4) 有理函数的积分

任何一个有理假分式都可以化为多项式与有理真分式的和. 又因为多项式的积分很容易,所以,可以将有理函数的不定积分转化为有理真分式的积分问题.

理论上已证明,任何真分式总能分解为部分分式和,分解方法如下:

设 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 为真分式,多项式 $Q(x)$ 总能在实数范围内分解为一次因式和二次真因式的乘积,不妨设

$$Q(x)=b_0(x-a)^k\cdots(x^2+px+q)^m\cdots,$$

其中 $p^2-4q<0,\cdots$. 于是真分式 $R(x)$ 必能分解为如下形式的部分分式之和:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)}+\cdots+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^m}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\cdots+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)}+\cdots,$$

其中诸函数中 $A_1,A_2,\cdots,A_k;M_1,M_2,\cdots,M_m;N_1,N_2,\cdots,N_m$ 等在具体问题中用**待定系数法**求出.

一般地,求有理真分式的不定积分的步骤是:

① 将有理真分式分解为部分分式和;

② 求出各部分分式的原函数.

4.3 题型总结与典型例题

题型 4-1 关于不定积分与原函数的概念

【解题思路】 本章最重要的两个概念是不定积分与原函数,正确理解不定积分与原函数的定义,是解决本题型的关键.

例 4.1 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,则 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]$ 等于( ).

A. $f(x)$ B. $f(x)\mathrm{d}x$ C. $f(x)+C$ D. $f'(x)\mathrm{d}x$

解 设 $F'(x)=f(x)$,则 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=\mathrm{d}[F(x)+C]=f(x)\mathrm{d}x$,故选 B.

注 d 与 $\int$ 是互逆的运算符号,相遇时则互相抵消. 不过当 $\int$ 在 d 之前时,相抵消后要加 C,如 $\int \mathrm{d}x=x+C$.

例 4.2 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\cos x$,$g(x)$ 的一个原函数为 x^2,下列哪些是复合函数 $f[g(x)]$ 的原函数( ).

A. x^2 B. $\cos^2 x$ C. $\cos x^2$ D. $\cos x$

解 先求 $f[g(x)]$,由题意得

$$f(x)=(\cos x)'=-\sin x,g(x)=(x^2)'=2x,\text{所以 } f[g(x)]=-\sin 2x.$$

将所给的四个函数逐个求导,只有 $(\cos^2 x)'=-2\cos x\sin x=-\sin 2x$,所以只有 $\cos^2 x$ 为 $f[g(x)]=-\sin 2x$ 的一个原函数,故选 B.

例 4.3　设 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，则 $F(x)$为偶函数是 $f(x)$为奇函数的(　　).

A. 必要条件　　B. 充分条件　　C. 充要条件　　D. 无关条件

解　充分性　因为 $F'(x)=f(x)$，若 $F(x)$为偶函数，则 $f(x)=F'(x)=-F'(-x)=-f(-x)$，即 $f(-x)=-f(x)$，$f(x)$为奇函数.

必要性　若 $f(x)$为奇函数，又$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，所以 $F(x)$ 为偶函数. 故选 C.

例 4.4　已知 $F'(x)=\dfrac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}$，且 $F(0)=1$，求 $F(x)$.

解　根据题设条件，有

$$F(x)=\int F'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=\int(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})\mathrm{d}x$$

$$=\int 1\mathrm{d}x-\int\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x+\int\sqrt[3]{x^2}\mathrm{d}x=x-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C.$$

又 $F(0)=1$，得 $C=1$. 所以 $F(x)=x-\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\dfrac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+1$.

题型 4-2　分项积分法

【解题思路】　通常把一个复杂的函数分解成 n 个简单函数之和，例如：$f(x)=k_1g_1(x)+k_2g_2(x)$，若能求出右端两个函数 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 的积分，则应用不定积分的基本性质 $\int f(x)\mathrm{d}x=k_1\int g_1(x)\mathrm{d}x+k_2\int g_2(x)\mathrm{d}x$ 就可以求出函数 $f(x)$ 的不定积分.

例 4.5　求下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{1+3x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　(2) $\displaystyle\int\frac{(x+1)^2}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$；　(3) $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}\mathrm{d}x$；　(4) $\displaystyle\int\frac{2^x+\mathrm{e}^x}{2^x\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

解　(1) $$\int\frac{1+3x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{-2+3(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x=-2\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+3\int\mathrm{d}x$$

$$=-2\arctan x+3x+C.$$

(2) $$\int\frac{(x+1)^2}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+1+2x}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\ln|x|+2\arctan x+C.$$

(3) $$\int\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2\cdot\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2x}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{\sin^2x}\mathrm{d}x=\tan x-\cot x+C.$$

(4) $$\int\frac{2^x+\mathrm{e}^x}{2^x\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int(\mathrm{e}^{-1})^x\mathrm{d}x+\int(2^{-1})^x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\ln\mathrm{e}^{-1}}+\frac{2^{-x}}{\ln2^{-1}}+C=-\frac{1}{\mathrm{e}^x}-\frac{1}{2^x\ln2}+C.$$

题型 4-3　第一类换元积分法(凑微分法)

【解题思路】　第一类换元积分法又称凑微分法，解题关键需在被积分函数中“凑”出一部分微分. 即“凑微分法”，由于这种方法灵活多变，因此是不定积分法中较难掌握的方法，在熟记常用公式的前提下，应多熟悉一些常用类型及其变化. 凑微分法是不定积分法中最重要的一种方法也是最难掌握的一种方法.

例 4.6 求下列不定积分：

(1) $\int e^{e^x+x}dx$； (2) $\int x(1+x^2)^{100}dx$； (3) $\int \frac{\sqrt{1+2\arctan x}}{1+x^2}dx$；

(4) $\int \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^5}dx$； (5) $\int \frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}$； (6) $\int (x\ln x)^{\frac{3}{2}}(\ln x+1)dx$.

解 (1) $\int e^{e^x+x}dx=\int e^{e^x}e^x dx=\int e^{e^x}de^x=e^{e^x}+C$.

(2) $\int x(1+x^2)^{100}dx=\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{100}d(1+x^2)=\frac{1}{202}(1+x^2)^{101}+C$.

(3) $$\int \frac{\sqrt{1+2\arctan x}}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int(1+2\arctan x)^{\frac{1}{2}}d(1+2\arctan x)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(1+2\arctan x)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}(1+2\arctan x)^{\frac{3}{2}}+C.$$

(4) $\int \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^5}dx=-\int(\cos x+\sin x)^{-5}d(\cos x+\sin x)=\frac{1}{4}(\cos x+\sin x)^{-4}+C$.

(5) $$\int \frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin x\cos x+2\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin x(1+\cos x)}=\int\frac{dx}{8\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}$$
$$=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}d\tan\frac{x}{2}}{4\tan\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}\int\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\right)d\tan\frac{x}{2}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{2}\tan^2\frac{x}{2}\right)+C.$$

(6) $\int(x\ln x)^{\frac{3}{2}}(\ln x+1)dx=\int(x\ln x)^{\frac{3}{2}}d(x\ln x)=\frac{2}{5}(x\ln x)^{\frac{5}{2}}+C$.

题型 4-4 第二类换元积分法

【解题思路】 第一类换元积分法，实际上是作变量代换 $\varphi(x)=t$，只是因为 $\varphi(x)$ 隐含在被积函数中，所以较难掌握；而第二类换元积分法是作变量代换 $x=\varphi(t)$，就较容易掌握，常见的变量代换有：三角代换、倒代换、无理函数的代换，换元积分法得到的结果必须代回原变量这一点很重要.

例 4.7 求下列不定积分：

(1) $\int\frac{x dx}{(x^2+3)\sqrt{1-x^2}}$； (2) $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$；

(3) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$； (4) $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$.

解 (1) 被积函数含 $\sqrt{1-x^2}$，于是设 $x=\sin t$，则 $dx=\cos t dt$，故

$$原式=\int\frac{\sin t\cos t dt}{(\sin^2 t+3)\cos t}=\int\frac{\sin t dt}{\sin^2 t+3}=-\int\frac{d\cos t}{4-\cos^2 t}$$
$$=-\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2-\cos t}+\frac{1}{2+\cos t}\right)d\cos t=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\cos t}{2-\cos t}\right|+C$$
$$=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\sqrt{1-x^2}}{2-\sqrt{1-x^2}}\right|+C.$$

(2) 被积函数含 $\sqrt{1+x^2}$，于是设 $x=\tan t$，则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，故

$$\text{原式}=\int\frac{\sec^2 t}{\tan^4 t\sec t}\mathrm{d}t=\int\frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}\mathrm{d}t=\int\frac{\cos^2 t}{\sin^4 t}\mathrm{d}\sin t=\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^4 t}\mathrm{d}\sin t$$

$$=\int\left(\frac{1}{\sin^4 t}-\frac{1}{\sin^2 t}\right)\mathrm{d}\sin t=-\frac{1}{3}\frac{1}{\sin^3 t}+\frac{1}{\sin t}+C=-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

(3) 原式 $=\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{1+\sqrt{(x+1)^2+1}}$. 设 $x+1=\tan t$，则 $\mathrm{d}(x+1)=\sec^2 t\mathrm{d}t\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，于是

$$\text{原式}=\int\frac{\sec^2 t\mathrm{d}t}{1+\sec t}=\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos t(1+\cos t)}=\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos t}-\int\frac{1}{1+\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=\int\sec t\mathrm{d}t-\int\frac{1}{\sin^2 t}\mathrm{d}t+\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+\cot t-\frac{1}{\sin t}+C$$

$$=\ln\left|\sqrt{x^2+2x+2}+x+1\right|+\frac{1}{x+1}-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+C.$$

(4) 设 $x=3\sec t$，则 $\mathrm{d}x=3\sec t\tan t\mathrm{d}t$，于是

$$\text{原式}=\int\frac{3\tan t}{3^4\sec^4 t}3\sec t\tan t\mathrm{d}t=\frac{1}{9}\int\sin^2 t\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{9}\int\sin^2 t\mathrm{d}\sin t=\frac{1}{27}\sin^3 t+C$$

$$=\frac{1}{27}\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\right)^3+C.$$

例 4.8 求不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^8(1+x^2)}$.

解 设 $x=\frac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$，于是

$$\text{原式}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{t^8}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}=-\int\frac{t^8}{t^2+1}\mathrm{d}t=-\int\frac{t^8-1+1}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

$$=-\int(t^2-1)(t^4+1)\mathrm{d}t-\int\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{7}t^7+\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3+t-\arctan t+C$$

$$=-\frac{1}{7x^7}+\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}+C.$$

注 本题是利用倒代换的换元积分法.该方法一般适用于被积函数的分子或分母含 x 的高次幂的情形.设 m,n 分别为被积函数的分子、分母关于 x 的最高次数，当 $n-m>1$ 时，利用倒代换的换元积分法.

例 4.7，例 4.8 为三角代换、倒代换的第二类换元积分，无理函数的代换的换元积分法在后面有题型.

题型 4-5 分部积分法

【解题思路】 分部积分公式 $\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int v(x)\mathrm{d}u(x)$ 或 $\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)\mathrm{d}x$，运用分部积分法的关键是如何选取 $u(x)$，$\mathrm{d}v(x)$. 利用分部积分

公式应注意两点：①v 要容易求出；② $\int v\mathrm{d}u$ 要比 $\int u\mathrm{d}v$ 容易计算.

例 4.9 求下列不定积分：

(1) $\int x^2\sin^2 x\mathrm{d}x$； (2) $\int \frac{(x+1)\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \mathrm{e}^{-x}\arctan\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$； (4) $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int x^2\sin^2 x\mathrm{d}x = \int x^2\,\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int x^2\cos 2x\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}\left(x^2\cdot\frac{\sin 2x}{2} - \int 2x\cdot\frac{\sin 2x}{2}\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2\sin 2x + \frac{1}{2}\left[x\cdot\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + \int\frac{\cos 2x}{2}\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C.$$

(2) $\int \frac{(x+1)\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x = \int (x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x+2}\right) = -\frac{(x+1)\mathrm{e}^x}{x+2} + \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$$= -\frac{x+1}{x+2}\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + C = \frac{1}{x+2}\mathrm{e}^x + C.$$

(3) $\int \mathrm{e}^{-x}\arctan\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int \arctan\mathrm{e}^x\mathrm{d}(-\mathrm{e}^{-x}) = -\arctan\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-x} + \int\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$$= -\arctan\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-x} + \int\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\cdot\mathrm{d}x$$

$$= -\arctan\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{-2x}) + C.$$

(4) $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\mathrm{d}x = \int\frac{x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x+1)}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = -\int x\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right)$

$$= -\frac{x}{\mathrm{e}^x+1} + \int\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)}\mathrm{d}x = -\frac{x}{\mathrm{e}^x+1} + \int\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$$

$$= -\frac{x}{\mathrm{e}^x+1} + \ln\mathrm{e}^x - \ln(\mathrm{e}^x+1) + C = \frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} - \ln(\mathrm{e}^x+1) + C.$$

例 4.10 若 $f(x)$的一个原函数是 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

解 $f(x)$ 的一个原函数是 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则 $f(x) = [\ln(x+\sqrt{1+x^2})]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，于是 $\int xf'(x)\mathrm{d}x = xf(x) - \int f(x)\mathrm{d}x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C$.

例 4.11 设 $f(x)$的一个原函数是 $x\ln x$，则 $\int xf(x)\mathrm{d}x = ($　　$)$.

A. $x^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ln x\right)+C$　　B. $x^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln x\right)+C$

C. $x^2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln x\right)+C$　　D. $x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\ln x\right)+C$

解　$f(x)$ 的一个原函数是 $x\ln x$，则 $f(x)=(x\ln x)'=\ln x+1$，于是

$$\int xf(x)\mathrm{d}x=\int x(\ln x+1)\mathrm{d}x=\int x\ln x\mathrm{d}x+\int x\mathrm{d}x=\int \ln x\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)+\int x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{2}+C=\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+C.$$

故选 B.

题型 4-6　有理函数的积分

【解题思路】　关于有理函数的积分，假分式可以分解为多项式与真分式的和，真分式可以分解为部分分式之和，最简真分式的形式只有四种：

$$\frac{1}{x-a},\quad \frac{1}{(x-a)^n},\quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\quad (n=2,3,\cdots,p^2-4q<0).$$

例 4.12　求下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x+1)^2}$；　　(2) $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$；

(3) $\displaystyle\int\frac{3x-2}{x^2-4x+5}\mathrm{d}x$；　　(4) $\displaystyle\int\frac{1}{x(x^6+4)}\mathrm{d}x$.

解　(1) 设 $\dfrac{1}{(x^2+1)(x+1)^2}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}+\dfrac{D}{x+1}$，通分并比较等式两边得

$$(Ax+B)(x+1)^2+C(x^2+1)+D(x+1)(x^2+1)$$
$$=(A+D)x^3+(2A+B+C+D)x^2+(A+2B+D)x+B+C+D=1,$$

即 $\begin{cases}A+D=0,\\2A+B+C+D=0,\\A+2B+D=0,\\B+C+D=1,\end{cases}$　解得 $\begin{cases}A=-\dfrac{1}{2},\\B=0,\\C=\dfrac{1}{2},\\D=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

于是 $$\int\frac{1}{(x^2+1)(x+1)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}$$
$$=-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2}\ln|x+1|+C.$$

(2) 方法一　因为 $x^4+1=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$，所以设 $\dfrac{x^2+1}{x^4+1}=\dfrac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$，解得 $A=0,B=\dfrac{1}{2},C=0,D=\dfrac{1}{2}$，于是

$$\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}x+1)+\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}x-1)+C.$$

方法二 $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+C.$$

(3) $\int\frac{3x-2}{x^2-4x+5}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+5}\mathrm{d}x+4\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+5}$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-4x+5)}{x^2-4x+5}+4\int\frac{\mathrm{d}(x-2)}{(x-2)^2+1}$$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+5)+4\arctan(x-2)+C.$$

(4) 方法一 $\int\frac{1}{x(x^6+4)}\mathrm{d}x=\int\frac{x^5}{x^6(x^6+4)}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\int\frac{1}{x^6(x^6+4)}\mathrm{d}x^6$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^6}-\frac{1}{x^6+4}\right)\mathrm{d}x^6\right]$$

$$=\frac{1}{24}[\ln x^6-\ln(x^6+4)]+C=\frac{1}{24}\ln\frac{x^6}{x^6+4}+C.$$

方法二 设 $x=\frac{1}{t}$,则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$,于是

$$\int\frac{1}{x(x^6+4)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t^6}+4\right)}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int\frac{-t^5}{1+4t^6}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{24}\int\frac{1}{1+4t^6}\mathrm{d}(1+4t^6)=-\frac{1}{24}\ln(1+4t^6)+C$$

$$=-\frac{1}{24}\ln\left(1+\frac{4}{x^6}\right)+C=\frac{1}{24}\ln\frac{x^6}{x^6+4}+C.$$

题型 4-7 简单无理函数的积分

【解题思路】 求简单无理函数的积分的关键是运用变量代换,或分子、分母有理化,把根号去掉,从而化为有理函数的积分.为此,可以通过对被积函数的变形或根据被积表达式的特点,灵活地选择变量来达到目的.

例 4.13 求下列不定积分:

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}$; (2) $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x$; (3) $\int\frac{\ln x}{\sqrt{3x-2}}\mathrm{d}x$.

解 (1) 被积函数含有两个根式 $\sqrt{x}$ 与 $\sqrt[4]{x}$,为了能同时消去这两个根式,令 $\sqrt[4]{x}=t$,即设 $\sqrt[4]{x}=t$,则 $x=t^4$,$\mathrm{d}x=4t^3\mathrm{d}t$,于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}=\int\frac{4t^3\mathrm{d}t}{t^2(1+t)^3}=4\int\frac{t}{(1+t)^3}\mathrm{d}t$$

$$=4\int\frac{1}{(1+t)^2}\mathrm{d}t-4\int\frac{1}{(1+t)^3}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{4}{1+t}+\frac{4}{2(1+t)^2}+C$$

$$=\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2}-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+C.$$

(2) 设$\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$,则 $x=\frac{1}{t^2-1}$,$\mathrm{d}x=-\frac{2t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t$,于是

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x=\int(t^2-1)t\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left|x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right|+C.$$

(3) 令 $\sqrt{3x-2}=t$,即 $x=\frac{1}{3}(t^2+2)$,则 $\mathrm{d}x=\frac{2}{3}t\mathrm{d}t$,于是

$$\int\frac{\ln x}{\sqrt{3x-2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\ln\frac{1}{3}(t^2+2)}{t}\cdot\frac{2}{3}t\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\int\ln\frac{t^2+2}{3}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{3}\left(t\ln\frac{t^2+2}{3}-\int t\cdot\frac{3}{t^2+2}\cdot\frac{2t}{3}\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left(t\ln\frac{t^2+2}{3}-2\int\frac{t^2}{t^2+2}\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left(t\ln\frac{t^2+2}{3}-2t+2\sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+C$$

$$=\frac{2}{3}\left[(\ln x-2)\sqrt{3x-2}+\frac{4\sqrt{2}}{3}\arctan\frac{\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2}}+C\right].$$

注 若被积函数含有 $\sqrt[n]{ax+b}$形式,可令 $\sqrt[n]{ax+b}=t$,即 $x=\frac{1}{a}(t^n-b)$;对被积函数含有 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$的简单无理函数,可令$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$,即 $x=\frac{b-dt^n}{ct^n-a}$. 尽管一些被积函数中所含根式的形式与上面介绍的有所不同,但也能通过变量替换将根式去掉. 如下面例 4.14 中可令 $\sqrt{e^x-2}=t$,即 $x=\ln(2+t^2)$.

例 4.14 求 $\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}\mathrm{d}x\,(x>1)$.

解 $\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}\mathrm{d}x=2\int x\mathrm{d}\sqrt{e^x-2}=2x\sqrt{e^x-2}-2\int\sqrt{e^x-2}\mathrm{d}x.$

令 $\sqrt{e^x-2}=t$,即 $x=\ln(2+t^2)$,则 $\mathrm{d}x=\frac{1}{2+t^2}2t\mathrm{d}t$,于是

$$\int\sqrt{e^x-2}\mathrm{d}x=\int t\frac{2t}{2+t^2}\mathrm{d}t=2\int\frac{t^2+2-2}{2+t^2}\mathrm{d}t=2\int\left(1-\frac{2}{2+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2t-2\sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C_1$$

$$=2\sqrt{e^x-2}-2\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{e^x}{2}-1}+C_1.$$

故

$$\text{原式}=2x\sqrt{e^x-2}-2\left(2\sqrt{e^x-2}-2\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{e^x}{2}-1}\right)+C$$

$$=2(x-2)\sqrt{e^x-2}+4\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{e^x}{2}-1}+C.\quad (C=2C_1)$$

题型 4-8　三角有理式积分

【解题思路】 对三角有理式积分，可通过万能置换公式 $\tan\frac{x}{2}=t,\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，化为有理函数的积分，或设 $\tan x=t$，也有直接凑微分的形式. 在一般情况下哪种方法简单就用哪种.

例 4.15 求下列不定积分：

(1) $\int\frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$；　(2) $\int\frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx$；　(3) $\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$.

解 (1) 设 $\tan\frac{x}{2}=t$，即 $x=2\arctan t$，则 $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$，于是

$$\int\frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\cdot\frac{2t}{1+t^2}+3}=\int\frac{dt}{t^2+2t+2}=\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2+1}$$

$$=\arctan(t+1)+C=\arctan\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)+C.$$

(2) 设 $3\sin x+2\cos x=\alpha(2\sin x+3\cos x)+\beta(2\sin x+3\cos x)'$，由此得 $2\alpha-3\beta=3,3\alpha+2\beta=2$，解出 $\alpha=\frac{12}{13},\beta=-\frac{5}{13}$，于是

$$\int\frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx=\frac{12}{13}\int dx-\frac{5}{13}\int\frac{(2\sin x+3\cos x)'}{2\sin x+3\cos x}dx$$

$$=\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}\ln|2\sin x+3\cos x|+C.$$

(3) $$\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}=\int\frac{\sin x\,dx}{(2+\cos x)\sin^2 x}=-\int\frac{d\cos x}{(2+\cos x)(1+\cos x)(1-\cos x)}$$

$$=\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{2+\cos x}-\frac{\frac{1}{2}}{1+\cos x}-\frac{\frac{1}{6}}{1-\cos x}\right)d\cos x$$

$$=\frac{1}{3}\ln|2+\cos x|-\frac{1}{2}\ln|1+\cos x|+\frac{1}{6}|1-\cos x|+C.$$

题型 4-9　分段函数的不定积分

【解题思路】 分段函数如果是可积函数，那么原函数是连续的，分别求出各区间段上的不定积分表达式，由原函数连续性，调整各积分常数的关系，使原函数在分界点处连续.

例 4.16 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x, & x>1,\end{cases}$ 求 $\int f(x)dx$.

解 $\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}x+C_1, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{2}+x+C_2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2+C_3, & x>1.\end{cases}$

因为 $f(x)$在 $x=0,x=1$ 处均连续,故原函数也连续,所以得

$$0+C_1=0+C_2,\quad \frac{1}{2}+1+C_2=1+C_3.$$

于是取 $C_1=C$,则 $C_2=C,C_3=\frac{1}{2}+C$. 故

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}x+C, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{2}+x+C, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2+\dfrac{1}{2}+C, & x>1.\end{cases}$$

例 4.17 求 $\int \max\{1,x^2\}\mathrm{d}x$.

解 因为 $\max\{1,x^2\}=\begin{cases}x^2, & x<-1,\\ 1, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$ 所以

$$g(x)=\int \max\{1,x^2\}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+C_1, & x<-1,\\ x+C_2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{x^3}{3}+C_3, & x>1.\end{cases}$$

又 $g(x)$为连续函数,所以

$$\lim_{x\to -1^-}g(x)=-\frac{1}{3}+C_1=-1+C_2=g(-1),\quad \lim_{x\to 1^+}g(x)=\frac{1}{3}+C_3=1+C_2=g(1).$$

解得 $C_1=-\frac{2}{3}+C_2,C_3=\frac{2}{3}+C_2$,于是取 $C=C_2$,得

$$g(x)=\int \max\{1,x^2\}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{3}+C, & x<-1,\\ x+C, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{3}+C, & x>1.\end{cases}$$

题型 4-10 综合题型的不定积分的计算

例 4.18 求 $\int \sin\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$.

【分析】 被积函数中含$\sqrt[3]{x}$,首先去掉根式,再两次用分部积分法积分.

解 令 $\sqrt[3]{x}=t$,即 $x=t^3$,则 $\mathrm{d}x=3t^2\mathrm{d}t$,于是

原式$=\int \sin t\cdot 3t^2\mathrm{d}t=-3\int t^2\mathrm{d}\cos t=-3t^2\cos t+3\int \cos t\cdot 2t\mathrm{d}t=-3t^2\cos t+6\int t\mathrm{d}\sin t$

$$=-3t^2\cos t+6t\sin t-6\int \sin t\mathrm{d}t=-3t^2\cos t+6t\sin t+6\cos t+C$$

$$=-3x^{\frac{2}{3}}\cos\sqrt[3]{x}+6\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}+6\cos\sqrt[3]{x}+C.$$

例 4.19 求 $\int \mathrm{e}^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2\mathrm{d}x$.

【分析】 用分部积分法 e^x 宜放在 $\mathrm{d}v$ 部分，而另一因式 $\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2$ 较烦琐，应先拆项化简.

解 $\int \mathrm{e}^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^x\left[\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right]\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

$$=\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}-\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}+C.$$

例 4.20 求 $\int\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}\ln x\mathrm{d}x$.

【分析】 用分部积分法 $\ln x$ 应放在分部积分的 u 中，另一因式 $\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}$ 较烦琐，应先拆项化简.

解 $\int\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}\ln x\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}\right)\ln x\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\ln x\mathrm{d}x+2\int\frac{1}{(x-1)^2}\ln x\mathrm{d}x$

$$=\int\ln x\mathrm{d}\ln x-2\int\ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

$$=\frac{\ln^2x}{2}-2\frac{\ln x}{x-1}+2\int\frac{1}{x(x-1)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\ln^2x}{2}-\frac{2\ln x}{x-1}+2\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\ln^2x}{2}-2\frac{\ln x}{x-1}+2\ln|x-1|-2\ln|x|+C.$$

4.4 课后习题解答

习题 4.1

1. 设 $f(x)=(2x+1)\mathrm{e}^{-x^2}$，则 $\int f'(x)\mathrm{d}x=$ ________.

解 因为 $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$，所以 $\int f'(x)\mathrm{d}x=(2x+1)\mathrm{e}^{-x^2}+C$.

2. 设 $\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

解 因为 $\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，所以 $\int f(x)\mathrm{d}x=\sin x+C$.

3. 求下列不定积分：

(1) $\int(1-\sqrt[3]{x^2})^2\mathrm{d}x$； (2) $\int\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}\right)\mathrm{d}x$； (3) $\int\left(2^x+x^2+\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$；

(4) $\int\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$； (5) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)}$； (6) $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$；

(7) $\int 2^x e^{-x} dx$; (8) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}dx$; (9) $\int \cot^2 x dx$;

(10) $\int \frac{2\times 3^x - 5\times 2^x}{3^x}dx$; (11) $\int \sin^2\frac{x}{2}dx$; (12) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}dx$;

(13) $\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$; (14) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$.

解 (1) $\int (1-\sqrt[3]{x^2})^2 dx = \int (1-2x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{4}{3}})dx = x-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+C$;

(2) $\int \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}\right)dx = \frac{x^2}{4}-\ln|x|-\frac{2}{x^2}+C$;

(3) $\int \left(2^x+x^2+\frac{3}{x}\right)dx = \frac{2^x}{\ln 2}+\frac{x^3}{3}+3\ln|x|+C$;

(4) $\int \left(\frac{1}{x}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \ln|x|-3\arcsin x+C$;

(5) $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = \int \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = -\frac{1}{x}-\arctan x+C$;

(6) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx = -\frac{1}{x}+\arctan x+C$;

(7) $\int 2^x e^{-x}dx = \int (2e^{-1})^x dx = \frac{(2e^{-1})^x}{\ln(2e^{-1})}+C = \frac{2^x e^{-x}}{\ln 2-1}+C$;

(8) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}dx = \int (e^x+1)dx = e^x+x+C$;

(9) $\int \cot^2 x dx = \int (\csc^2 x-1)dx = \int \csc^2 x dx - \int 1dx = -\cot x - x + C$;

(10) $\int \frac{2\times 3^x-5\times 2^x}{3^x}dx = \int \left[2-5\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]dx = 2x-\frac{5\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}+C = 2x-\frac{5}{\ln 2-\ln 3}\left(\frac{2}{3}\right)^x+C$;

(11) $\int \sin^2\frac{x}{2}dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos x)dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos x)dx = \frac{1}{2}\left[\int dx-\int\cos x dx\right] = \frac{1}{2}(x-\sin x)+C$;

(12) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx = \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}dx = \int(\cos x+\sin x)dx = \sin x-\cos x+C$;

(13) $\int \frac{dx}{1+\cos 2x} = \int \frac{1}{2\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\tan x+C$;

(14) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x}dx+\frac{1}{2}\int 1dx = \frac{1}{2}\tan x+\frac{1}{2}x+C$.

4. 一曲线通过点$(e^2,3)$，且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数，求该曲线的方程.

解 根据题意知 $f'(x)=\frac{1}{x}$，即 $f(x)$ 是$\frac{1}{x}$ 的一个原函数，从而 $f(x)=\int \frac{1}{x}dx=\ln x+C$.

由于曲线通过点$(e^2,3)$，得 $3=2+C$，即 $C=1$，故所求曲线方程为 $y=\ln x+1$.

5. 对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$ 且 $f(1)=1$，求 $f(x)$.

解 设 $t=\sin^2 x$，则 $f'(t)=1-t$，即 $f'(x)=1-x$，于是 $f(x)=\int(1-x)dx=x-\frac{x^2}{2}+C$.

又由于 $f(1)=1$，所以 $1-\frac{1}{2}+C=1$，即 $C=\frac{1}{2}$，因此 $f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$.

6. 已知 $F'(x)=\frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}$，且 $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$，求 $F(x)$.

解 根据题设条件，有

$$F(x)=\int F'(x)dx=\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}dx=\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{4\sin^2 x\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}(\tan x+\cot x)+C.$$

由 $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$，得 $-\frac{1}{4}\left(\tan\frac{\pi}{4}+\cot\frac{\pi}{4}\right)+C=-1$，即 $C=-\frac{1}{2}$，故 $F(x)=-\frac{1}{4}(\tan x+\cot x)-\frac{1}{2}$.

提高题

1. $y=y(x)$ 在任何点 x 处的增量 $\Delta y=\frac{2x}{1+x^2}\Delta x+o(\Delta x)$，且 $y(0)=0$，则 $y(1)=$________.

解 因为 $\Delta y=\frac{2x}{1+x^2}\Delta x+o(\Delta x)$，所以 $y'=\frac{2x}{1+x^2}$，故 $y=\int y'\mathrm{d}x=\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\ln(1+x^2)+C$.
由 $y(0)=0$ 得 $0=\ln(1+0)+C$，故 $C=0$，从而 $y=\ln(1+x^2)+C=\ln(1+x^2)$，于是 $y(1)=\ln 2$.

2. $f'(\mathrm{e}^x)=1+\mathrm{e}^{2x}$，$f(0)=1$，求 $f(x)$.

解 因为 $f'(\mathrm{e}^x)=1+(\mathrm{e}^x)^2$，所以 $f'(x)=1+x^2$，于是

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(1+x^2)\mathrm{d}x=x+\frac{1}{3}x^3+C.$$

由 $f(0)=1$ 得 $C=1$，故 $f(x)=x+\frac{1}{3}x^3+1$.

3. 设某商品的收益函数为 $R(p)$，收益弹性为 $1+p^3$，其中 p 为价格，且 $R(1)=1$，求 $R(p)$.

解 由题意得 $\frac{\mathrm{d}R}{R}\Big/\frac{\mathrm{d}p}{p}=1+p^3$，故 $\int\frac{\mathrm{d}R}{R}=\int\frac{1+p^3}{p}\mathrm{d}p$，于是 $\ln R=\ln p+\frac{p^3}{3}+C$.

把 $R(1)=1$ 代入上式，得 $C=-\frac{1}{3}$，于是 $\ln R=\ln p+\frac{p^3}{3}-\frac{1}{3}$.

4. 设某商品的最大需求量为 1200 件，该商品的需求函数 $Q=Q(p)$，需求弹性 $\eta=\frac{p}{120-p}(\eta>0)$，$p$ 为单价(单位：万元).

(1) 求需求函数的表达式；

(2) 求 $p=100$ 万元时的边际效益，并说明其经济意义.

解 (1) 由题意得 $\eta=-\frac{\mathrm{d}Q}{Q}\Big/\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{p}{120-p}$，于是得 $\frac{\mathrm{d}Q}{Q}=-\frac{\mathrm{d}p}{120-p}$，故 $\int\frac{\mathrm{d}Q}{Q}=-\int\frac{\mathrm{d}p}{120-p}$，即 $\ln Q=\ln(120-p)+\ln C$，进一步得 $Q=C(120-p)$.

当 $p=0$ 时，由 $Q=1200$，得 $C=10$，所以 $Q=10(120-p)=1200-10p$.

(2) $R=Qp=Q\frac{1200-Q}{10}$，故 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=\frac{1200-2Q}{10}$，当 $p=100$ 时，$Q=200$，$\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}\right|_{p=100}=\frac{1200-400}{10}=80$，即需求量每提高 1 件，收益增加 80 万元.

习题 4.2

1. 填空：

(1) $\mathrm{d}x=$________ $\mathrm{d}(5x+2)$；　(2) $\sin 3x\mathrm{d}x=$________ $\mathrm{d}\cos 3x$；

(3) $x^9\mathrm{d}x=$________ $\mathrm{d}(2x^{10}-5)$；　(4) $\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x=$________ $\mathrm{d}\mathrm{e}^{3x}$；

(5) $\frac{1}{2x+1}\mathrm{d}x=$________ $\mathrm{d}(7\ln(2x+1))$；　(6) $\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=$________ $\mathrm{d}\left(\frac{2}{x}\right)$；

(7) $\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\mathrm{d}x=$________ $\mathrm{d}(\arcsin 3x)$；　(8) $\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 2x}=$________ $\mathrm{d}(\tan 2x)$；

(9) $\frac{\mathrm{d}x}{1+9x^2}=$________ $\mathrm{d}(\arctan 3x)$.

解 (1) $\frac{1}{5}$；(2) $-\frac{1}{3}$；(3) $\frac{1}{20}$；(4) $\frac{1}{3}$；(5) $\frac{1}{14}$；(6) $-\frac{1}{2}$；(7) $\frac{1}{3}$；(8) $\frac{1}{2}$；(9) $\frac{1}{3}$.

2. 求下列不定积分：

(1) $\int(3-2x)^{10}\mathrm{d}x$； (2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2-3x}}$； (3) $\int e^{3x-1}\mathrm{d}x$； (4) $\int\frac{1}{1-5x}\mathrm{d}x$；

(5) $\int\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$ (6) $\int\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$； (7) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x}$； (8) $\int x\cos x^2\mathrm{d}x$；

(9) $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x^2}}$； (10) $\int\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\mathrm{d}x$； (11) $\int\frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$； (12) $\int\frac{3x^3}{1-x^4}\mathrm{d}x$；

(13) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(2+5\ln x)}$； (14) $\int\frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$； (15) $\int\frac{6^x}{4^x+9^x}\mathrm{d}x$； (16) $\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$；

(17) $\int\cos^3 x\mathrm{d}x$； (18) $\int\frac{10^{\arctan x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$； (19) $\int\frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x$； (20) $\int\frac{x+1}{\sqrt{2-x-x^2}}\mathrm{d}x$；

(21) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$； (22) $\int\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x$； (23) $\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$；(24) $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x-1)^{100}}$.

解 (1) $\int(3-2x)^{10}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int(3-2x)^{10}\mathrm{d}(3-2x)=-\frac{1}{22}(3-2x)^{11}+C$；

(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2-3x}}=-\frac{1}{3}\int(2-3x)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}(2-3x)=-\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}}+C=-\frac{1}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}}+C$；

(3) $\int e^{3x-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int e^{3x-1}\mathrm{d}(3x-1)=\frac{1}{3}e^{3x-1}+C$；

(4) $\int\frac{1}{1-5x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{5}\int\frac{1}{1-5x}\mathrm{d}(1-5x)=-\frac{1}{5}\ln|1-5x|+C$；

(5) $\int\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=\int e^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)=e^{-\frac{1}{x}}+C$；

(6) $\int\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=2\int\sin\sqrt{t}\mathrm{d}\sqrt{t}=-2\cos\sqrt{t}+C$；

(7) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x}=\int\frac{\mathrm{d}\ln\ln x}{\ln\ln x}=\ln|\ln\ln x|+C$；

(8) $\int x\cos x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\cos x^2\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\sin x^2+C$；

(9) $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x^2}}=-\frac{1}{6}\int(2-3x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(2-3x^2)=-\frac{1}{6}\times2\sqrt{2-3x^2}+C=-\frac{1}{3}\sqrt{2-3x^2}+C$；

(10) $\int\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\ln|\sin x+\cos x|+C$；

(11) $\int\frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{e^x\mathrm{d}x}{(e^x)^2+1}=\int\frac{\mathrm{d}e^x}{(e^x)^2+1}=\arctan e^x+C$；

(12) $\int\frac{3x^3}{1-x^4}\mathrm{d}x=-\frac{3}{4}\int\frac{\mathrm{d}(1-x^4)}{1-x^4}=-\frac{3}{4}\ln|1-x^4|+C$；

(13) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(2+5\ln x)}=\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}(2+5\ln x)}{(2+5\ln x)}=\frac{1}{5}\ln|2+5\ln x|+C$；

(14) $\int\frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\int\arccos^2 x\mathrm{d}(\arccos x)=-\frac{1}{3}(\arccos x)^3+C$；

(15) $\int\frac{6^x}{4^x+9^x}\mathrm{d}x=\int\frac{6^x}{9^x\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+1\right]}\mathrm{d}x=\int\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+1\right]}\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln2-\ln3}\arctan\left(\frac{2}{3}\right)^x+C$；

(16) $\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^3 x}=\frac{1}{2\cos^2 x}+C$；

(17) $\int \cos^3 x \mathrm{d}x = \int \cos^2 x \cos x \mathrm{d}x = \int (1-\sin^2 x)\mathrm{d}\sin x = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$;

(18) $\int \frac{10^{\arctan x}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int 10^{\arctan x}\mathrm{d}\arctan x = \frac{10^{\arctan x}}{\ln 10} + C$;

(19) $\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \int \frac{(1+\mathrm{e}^x)-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = x - \int \frac{\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)}{1+\mathrm{e}^x} = x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + C$;

(20) $$\int \frac{x+1}{\sqrt{2-x-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{\sqrt{2-x-x^2}}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{2-x-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(2-x-x^2)}{\sqrt{2-x-x^2}} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{\sqrt{3-(x+1)^2}}$$
$$= -\sqrt{2-x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C;$$

(21) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}\arcsin x}{(\arcsin x)^2} = -\frac{1}{\arcsin x} + C$;

(22) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{(x\ln x)^2} = -\frac{1}{x\ln x} + C$;

(23) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\sin^2 x}{1+\sin^4 x} = \frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x) + C$;

(24) $$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x-1)^{100}} = \int \frac{(x^2-1)+1}{(x-1)^{100}}\mathrm{d}x = \int \frac{x+1}{(x-1)^{99}}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x-1)^{100}}\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{x-1+2}{(x-1)^{99}}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x-1)^{100}}\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{1}{(x-1)^{98}}\mathrm{d}(x-1) + 2\int \frac{1}{(x-1)^{99}}\mathrm{d}(x-1) + \int \frac{1}{(x-1)^{100}}\mathrm{d}(x-1)$$
$$= -\frac{1}{97}\frac{1}{(x-1)^{97}} - \frac{1}{49}\frac{1}{(x-1)^{98}} - \frac{1}{99}\frac{1}{(x-1)^{99}} + C.$$

3. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}$；　(2) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x$；　(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+1}}$；

(4) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$；　(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$；　(6) $\int \sqrt{5-4x-x^2}\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x - \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} - \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$.

设 $x=\sin t$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t = \int \cot^2 t\mathrm{d}t = \int (\csc^2 t - 1)\mathrm{d}t = -\cot t - t - C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x - C,$$

从而 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x - \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$

(2) 设 $x=3\sec t$，则 $\mathrm{d}x=3\sec t\tan t\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{3\tan t}{3\sec t}3\sec t\tan t\mathrm{d}t = 3\int \tan^2 t\mathrm{d}t = 3\int (\sec^2 t - 1)\mathrm{d}t$$
$$= 3(\tan t - t) + C = \sqrt{x^2-9} - 3\arccos\frac{3}{|x|} + C.$$

(3) 设 $x=\tan t$，则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{1}{\tan^2 t\sec t}\sec^2 t\mathrm{d}t = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t} + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

(4) 设 $x=a\sin t$，则 $dx=a\cos t dt$，于是

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx=\int \frac{a\cos t}{a^2\sin^2 t}a\cos t dt=\int \cot^2 t dt=\int(\csc^2 t-1)dt$$

$$=-\cot t-t+C=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

(5) 设 $x=a\tan t$，则 $dx=a\sec^2 t dt$，于是

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}=\int \frac{1}{a^3\sec^3 t}a\sec^2 t dt=\frac{1}{a^2}\int \cos t dt=\frac{1}{a^2}\sin t+C=\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+C.$$

(6) 设 $x+2=3\sin t$，则 $dx=3\cos t dt$，于是

$$\int \sqrt{5-4x-x^2}dx=\int \sqrt{9-(x+2)^2}dx=9\int \cos^2 t dt=9\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{9}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C$$

$$=\frac{9}{2}(t+\sin t\cos t)+C=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x+2}{3}+\frac{x+2}{2}\sqrt{5-4x-x^2}+C.$$

提高题

1. $\int \frac{3\cos x+\sin x}{2\sin x+\cos x}dx=$ ________.

解 $\int \frac{3\cos x+\sin x}{2\sin x+\cos x}dx=\int\left(\frac{2\sin x+\cos x}{2\sin x+\cos x}+\frac{2\cos x-\sin x}{2\sin x+\cos x}\right)dx=\int 1dx+\int \frac{1}{2\sin x+\cos x}d(2\sin x+\cos x)$

$$=x+\ln|2\sin x+\cos x|+C.$$

2. 若 $\int f(x)dx=x^2+C$，求 $\int xf(1-x^2)dx$.

解 $\int xf(1-x^2)dx=-\frac{1}{2}\int f(1-x^2)d(1-x^2)=-\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C.$

3. $\int xf(x^2)f'(x^2)dx=$ ________.

解 $\int xf(x^2)f'(x^2)dx\xlongequal{t=x^2}\frac{1}{2}\int f(t)f'(t)dt=\frac{1}{2}\int f(t)df(t)=\frac{f^2(t)}{4}+C=\frac{f^2(x^2)}{4}+C.$

4. 已知 $f(x)=e^{-x}$，求 $\int \frac{f'(\ln x)}{x}dx$.

解 $\int \frac{f'(\ln x)}{x}dx=\int f'(\ln x)d\ln x=f(\ln x)+C=e^{-\ln x}+C=\frac{1}{x}+C.$

5. 已知 $f'(\cos x)=\sin x$，求 $f(\cos x)$.

解 $\int f'(\cos x)\sin x dx=-\int f'(\cos x)d\cos x=-f(\cos x)+C_1$.

又 $\int f'(\cos x)\sin x dx=\int \sin^2 x dx=\int \frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C_2$. 故

$$f(\cos x)=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{x}{2}+C(C=C_1-C_2).$$

习题 4.3

1. 求下列不定积分：

(1) $\int x\cos 2x dx$； (2) $\int xe^{-x}dx$； (3) $\int \ln(x^2+1)dx$；

(4) $\int \arccos x dx$； (5) $\int \arctan x dx$； (6) $\int \ln^2 x dx$；

(7) $\int x\cos^2 x dx$； (8) $\int x\ln(x-1)dx$； (9) $\int \cos\ln x dx$；

(10) $\int e^{\sqrt{2x+1}}dx$； (11) $\int e^x\sin^2 x dx$； (12) $\int(\arcsin x)^2dx$；

(13) $\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$；　(14) $\int \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$；　(15) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int x\cos 2x\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}\frac{\sin 2x}{2} = \frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$；

(2) $\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}(-\mathrm{e}^{-x}) = -x\mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + C$；

(3) $\int \ln(x^2+1)\mathrm{d}x = x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x = x\ln(x^2+1) - 2\left(\int \mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x\right)$

$= x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan x + C$；

(4) $\int \arccos x\mathrm{d}x = x\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = x\arccos x - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$；

(5) $\int \arctan x\mathrm{d}x = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2}$

$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$；

(6) $\int \ln^2 x\mathrm{d}x = x\ln^2 x - 2\int \ln x\mathrm{d}x = x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - \int \mathrm{d}x\right) = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$；

(7) $\int x\cos^2 x\mathrm{d}x = \int x\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} + \int x\mathrm{d}\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)\right]$

$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$；

(8) $\int x\ln(x-1)\mathrm{d}x = \int \ln(x-1)\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\ln(x-1) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x-1}$

$= \frac{x^2}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1+1}{x-1}\mathrm{d}x$

$= \frac{x^2}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\int\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + C$；

(9) $\int \cos\ln x\mathrm{d}x = x\cos\ln x + \int x\sin\ln x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\cos\ln x + \int \sin\ln x\mathrm{d}x$

$= x\cos\ln x + x\sin\ln x - \int \cos\ln x\mathrm{d}x$，

故
$$\int \cos\ln x\mathrm{d}x = \frac{x}{2}(\sin\ln x + \cos\ln x) + C.$$

(10) 设 $t = \sqrt{2x+1}$，即 $x = \frac{1}{2}(t^2-1)$，则 $\mathrm{d}x = t\mathrm{d}t$，于是

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^t t\mathrm{d}t = \int t\mathrm{d}\mathrm{e}^t = t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + C = \mathrm{e}^{\sqrt{2x+1}}(\sqrt{2x+1}-1) + C.$$

(11) $\int \mathrm{e}^x\sin^2 x\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x.$

而
$$\int \mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x = \int \cos 2x\mathrm{d}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\cos 2x + 2\int \mathrm{e}^x\sin 2x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\cos 2x + 2\int \sin 2x\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$
$$= \mathrm{e}^x\cos 2x + 2\mathrm{e}^x\sin 2x - 4\int \mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x，$$

故 $\int \mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x)\mathrm{e}^x + C$，从而 $\int \mathrm{e}^x\sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x - \frac{1}{10}(\cos 2x + 2\sin 2x)\mathrm{e}^x + C.$

(12) $\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x = x(\arcsin x)^2 - \int x\cdot 2\arcsin x\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\int\arcsin x\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2\int\mathrm{d}x$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

(13) $\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int\ln\sin x\mathrm{d}(-\cot x) = -\cot x\ln\sin x + \int\frac{\cot x}{\sin x}\cos x\mathrm{d}x$

$$= -\cot x\ln\sin x + \int\cot^2 x\mathrm{d}x = -\cot x\ln\sin x + \int(\csc^2 x - 1)\mathrm{d}x$$

$$= -\cot x\ln\sin x - \cot x - x + C.$$

(14) $\int\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x = \int\ln(1+x)\mathrm{d}\left(\frac{1}{2-x}\right) = \frac{1}{2-x}\ln(1+x) - \int\frac{1}{(1+x)(2-x)}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2-x}\ln(1+x) - \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2-x}\ln(1+x) + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{2-x}{1+x}\right| + C.$$

(15) $\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\int\arcsin x\mathrm{d}\sqrt{1-x^2} = -\left(\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int\mathrm{d}x\right)$

$$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + C.$$

2. 设函数 $f(x)$有连续的导函数，且 $\int f(x)\mathrm{d}x = \sin x\mathrm{e}^x + C$. 求$\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

解　因为$\int f(x)\mathrm{d}x = \sin x\mathrm{e}^x + C$，所以 $f(x) = (\sin x\mathrm{e}^x)' = (\cos x + \sin x)\mathrm{e}^x$，于是

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}f(x) = xf(x) - \int f(x)\mathrm{d}x = x(\cos x + \sin x)\mathrm{e}^x - \sin x\mathrm{e}^x + C$$

$$= (x\cos x + x\sin x - \sin x)\mathrm{e}^x + C.$$

3. 设 $f(x)$的一个原函数为$\frac{\sin x}{x}$，求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

解　因为 $f(x)$的一个原函数为$\frac{\sin x}{x}$，所以 $f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，于是

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}f(x) = xf(x) - \int f(x)\mathrm{d}x = x\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} + C$$

$$= \frac{x\cos x - 2\sin x}{x} + C = \cos x - \frac{2\sin x}{x} + C.$$

提高题

1. 已知 $f'(\mathrm{e}^x)=1+x$，求 $f(x)$.

解　设 $t=\mathrm{e}^x$，即 $x=\ln t$，则 $f'(t)=1+\ln t$，即 $f'(x)=1+\ln x$，于是

$$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int(1+\ln x)\mathrm{d}x = x\ln x + C.$$

2. $\int\mathrm{e}^{2x}(\tan x + 1)^2\mathrm{d}x =$ ________.

解　$\int\mathrm{e}^{2x}(\tan x+1)^2\mathrm{d}x = \int\mathrm{e}^{2x}(\tan^2 x + 2\tan x + 1)\mathrm{d}x = \int\mathrm{e}^{2x}(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x + 2\int\mathrm{e}^{2x}\tan x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$

$$= \int\mathrm{e}^{2x}\sec^2 x\mathrm{d}x - \int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x + 2\int\mathrm{e}^{2x}\tan x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}.$$

而

$$\int e^{2x}\sec^2 x\mathrm{d}x+2\int e^{2x}\tan x\mathrm{d}x=\int e^{2x}\mathrm{d}\tan x+2\int e^{2x}\tan x\mathrm{d}x=e^{2x}\tan x-\int \tan x 2e^{2x}\mathrm{d}x+2\int e^{2x}\tan x\mathrm{d}x$$
$$=e^{2x}\tan x+C.$$

所以，原式$=e^{2x}\tan x+C$，故应填 $e^{2x}\tan x+C$.

3. 设函数 $f(x)$的一个原函数为$\dfrac{\sin x}{x}$，求 $\int xf'(2x)\mathrm{d}x$.

解 $\int xf'(2x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int xf'(2x)\mathrm{d}(2x)=\dfrac{1}{2}\int x\mathrm{d}f(2x)=\dfrac{1}{2}xf(2x)-\dfrac{1}{2}\int f(2x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}xf(2x)-\frac{1}{4}\int f(2x)\mathrm{d}(2x).$$

由题设 $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，所以

$$\int xf'(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}xf(2x)-\frac{1}{4}\frac{\sin 2x}{2x}+C=\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\sin 2x}{4x}+C.$$

4. 利用分部积分计算 $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\dfrac{2x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\dfrac{-a^2+x^2+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x+\int\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x,$$

故 $2\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\int\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$，即

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)+C.$$

习题 4.4

1. 求下列不定积分：

(1) $\int\dfrac{6x+5}{x^2+4}\mathrm{d}x$； (2) $\int\dfrac{2x+3}{x^2+8x+16}\mathrm{d}x$； (3) $\int\dfrac{x\mathrm{d}x}{(x+2)(x+3)^2}$；

(4) $\int\dfrac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$； (5) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^3-8}$； (6) $\int\dfrac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$；

(7) $\int\dfrac{2x^2-3x+1}{(x^2+1)(x^2+x)}\mathrm{d}x$； (8) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)}$； (9) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^8(1-x^2)}$.

解 (1) $\int\dfrac{6x+5}{x^2+4}\mathrm{d}x=\int\dfrac{3}{x^2+4}\mathrm{d}(x^2+4)+\int\dfrac{5}{x^2+4}\mathrm{d}x=3\ln(x^2+4)+\dfrac{5}{2}\arctan\dfrac{x}{2}+C.$

(2) $\int\dfrac{2x+3}{x^2+8x+16}\mathrm{d}x=\int\dfrac{2x+8}{x^2+8x+16}\mathrm{d}x-\int\dfrac{5}{x^2+8x+16}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(x^2+8x+16)}{x^2+8x+16}-5\int\frac{\mathrm{d}(x+4)}{(x+4)^2}$$

$$=\ln(x^2+8x+16)+\frac{5}{x+4}+C=2\ln|x+4|+\frac{5}{x+4}+C.$$

(3) 设$\dfrac{x}{(x+2)(x+3)^2}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{(x+3)^2}+\dfrac{C}{x+3}$，其中 A,B,C 为待定系数，两端比较，得

$$x=A(x+3)^2+B(x+2)+C(x+2)(x+3).$$

令 $x=-2$ 得 $A=-2$；令 $x=-3$ 得 $B=3$；令 $x=0$ 得 $C=2$，即

$$\frac{x}{(x+2)(x+3)^2}=\frac{-2}{x+2}+\frac{3}{(x+3)^2}+\frac{2}{x+3}.$$

$$\int\frac{x}{(x+2)(x+3)^2}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{-2}{x+2}+\frac{3}{(x+3)^2}+\frac{2}{x+3}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{-2}{x+2}\mathrm{d}(x+2)+\int\frac{3}{(x+3)^2}\mathrm{d}(x+3)+\int\frac{2}{x+3}\mathrm{d}(x+3)$$

$$=-2\ln|x+2|-\frac{3}{x+3}+2\ln|x+3|+C$$

$$=\ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2-\frac{3}{x+3}+C.$$

(4) 设 $\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}$,其中 A,B,C 为待定系数,两端比较,得

$$x=A(x+3)(x+2)+B(x+1)(x+3)+C(x+2)(x+1).$$

令 $x=-1$ 得 $A=-\frac{1}{2}$;令 $x=-2$ 得 $B=2$;令 $x=-3$ 得 $C=-\frac{3}{2}$,即

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}=-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{2}{x+2}-\frac{3}{2(x+3)}.$$

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}+2\int\frac{\mathrm{d}x}{x+2}-\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+3}$$

$$=2\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{3}{2}\ln|x+3|+C.$$

(5) $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$,令 $\frac{1}{x^3-8}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$,其中 A,B,C 为待定系数,两端比较得

$$1=A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2),$$

解得 $A=\frac{1}{12},B=-\frac{1}{12},C=-\frac{1}{3}$.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3-8}=\int\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x+\int\frac{-\frac{1}{12}x-\frac{1}{3}}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{12}\int\frac{1}{x-2}\mathrm{d}(x-2)-\frac{1}{24}\int\frac{2x+8}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{12}\ln|x-2|-\frac{1}{24}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x-\frac{1}{24}\int\frac{6}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{12}\ln|x-2|-\frac{1}{24}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4}-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+3}$$

$$=\frac{1}{12}\ln|x-2|-\frac{1}{24}\ln(x^2+2x+4)-\frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

(6) $\int\frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2}$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

(7) 令 $\frac{2x^2-3x+1}{(x^2+1)(x^2+x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$,其中 A,B,C,D 为待定系数,两端比较得

$$2x^2-3x+1=A(x^2+1)(x+1)+Bx(x^2+1)+x(x+1)(Cx+D)$$

$$=(A+B+C)x^3+(A+D+C)x^2+(A+B+D)x+A,$$

则 $\begin{cases}A+B+C=0,\\A+D+C=2,\\A+B+D=-3,\\A=1,\end{cases}$,解得 $\begin{cases}A=1,\\B=-3,\\C=2,\\D=-1.\end{cases}$

$$\int\frac{2x^2-3x+1}{(x^2+1)(x^2+x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int\frac{-3}{x+1}\mathrm{d}x+\int\frac{2x-1}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$=\ln|x|-3\ln|x+1|+\ln(x^2+1)-\arctan x+C.$$

(8) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)}=\int\frac{x^5\mathrm{d}x}{x^6(x^6+4)}=\frac{1}{4}\int\frac{x^5\mathrm{d}x}{x^6}-\frac{1}{4}\int\frac{x^5\mathrm{d}x}{x^6+4}=\frac{1}{24}\int\frac{\mathrm{d}(x^6)}{x^6}-\frac{1}{24}\int\frac{\mathrm{d}(x^6+4)}{x^6+4}$

$$= \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{1}{24}\ln(x^6+4)+C.$$

(9) 令 $\frac{1}{x^8(1-x^2)} = \frac{A_1}{x^8}+\frac{A_2}{x^7}+\frac{A_3}{x^6}+\frac{A_4}{x^5}+\frac{A_5}{x^4}+\frac{A_6}{x^3}+\frac{A_7}{x^2}+\frac{A_8}{x}+\frac{B_1}{1+x}+\frac{B_2}{1-x}$，其中 $A_1, A_2, \cdots, A_8, B_1, B_2$ 为待定系数，于是得

$$1 = A_1(1-x^2)+A_2x(1-x^2)+\cdots+A_8x^7(1-x^2)+B_1x^8(1-x)+B_2x^8(1+x).$$

两端比较系数解得

$$A_1=1,\ A_2=0, A_3=1, A_4=0, A_5=1, A_6=0, A_7=1, A_8=0,\ B_1=\frac{1}{2}, B_2=\frac{1}{2},$$

所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^8(1-x^2)} = \int\frac{1}{x^8}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^6}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^4}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{7x^7}-\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|1+x|-\frac{1}{2}\ln|1-x|+C$$

$$=-\frac{1}{7x^7}-\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+C.$$

2. 求下列不定积分：

(1) $\int\frac{\sqrt{x+2}}{x+3}\mathrm{d}x$；　(2) $\int\frac{1}{x^2}\sqrt[5]{\left(\frac{x}{x+1}\right)^3}\mathrm{d}x$；　(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$；

(4) $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x$；　(5) $\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x$；　(6) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{(x-2)^3(x+1)^5}}$.

解 (1) 令 $t=\sqrt{x+2}$，即 $x=t^2-2$，则 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\sqrt{x+2}}{x+3}\mathrm{d}x=\int\frac{t}{t^2+1}2t\mathrm{d}t=2\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\mathrm{d}t=2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2(t-\arctan t)+C=2\sqrt{x+2}-2\arctan\sqrt{x+2}+C.$$

(2) 令 $t=\sqrt[5]{\frac{x}{1+x}}$，即 $x=\frac{t^5}{1-t^5}$，则 $\mathrm{d}x=\frac{5t^4}{(1-t^5)^2}\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{1}{x^2}\sqrt[5]{\left(\frac{x}{1+x}\right)^3}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1-t^5}{t^5}\right)^2t^3\frac{5t^4}{(1-t^5)^2}\mathrm{d}t=5\int\frac{1}{t^3}\mathrm{d}t=-\frac{5}{2}\frac{1}{t^2}+C=-\frac{5}{2}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{2}{5}}+C.$$

(3) 设 $x=t^4$，则 $\mathrm{d}x=4t^3\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x=\int\frac{4t^3}{t^2+t}\mathrm{d}t=\int\frac{4t^2}{t+1}\mathrm{d}t=4\int\frac{t^2-1+1}{t+1}\mathrm{d}t=4\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=4\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+C=2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C.$$

(4) 令 $t=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$，即 $x=\frac{a(t^2-1)}{t^2+1}$，则 $\mathrm{d}x=\frac{4at\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$，于是 $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x=4a\int\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$.

设 $t=\tan u$，则 $\mathrm{d}t=\sec^2u\mathrm{d}u$，于是

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x=4a\int\frac{\tan^2u}{\sec^4u}\sec^2u\mathrm{d}u=4a\int\sin^2u\mathrm{d}u=4a\int\frac{1-\cos2u}{2}\mathrm{d}u=2a\left(u-\frac{\sin2u}{2}\right)+C$$

$$=2a\left(\arctan t-\frac{t}{1+t^2}\right)+C=2a\left(\arctan\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a}\right)+C$$

$$=2a\arctan\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}-\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

(5) 令 $t=\sqrt{x+1}$，即 $x=t^2-1$，则 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x=\int\frac{t-1}{t+1}2t\mathrm{d}t=2\int\frac{t^2-t}{t+1}\mathrm{d}t=2\int\frac{t^2+t-(2t+2)+2}{t+1}\mathrm{d}t$$

$$= 2\left(\int t\mathrm{d}t - 2\int \mathrm{d}t + \int \frac{2}{t+1}\mathrm{d}t\right) = 2\left(\frac{t^2}{2} - 2t + 2\ln|t+1|\right) + C_1$$

$$= x - 4\sqrt{x+1} + 4\ln(\sqrt{x+1}+1) + C,$$

其中 $C=C_1+1$.

(6) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{(x-2)^3(x+1)^5}} = \int \frac{1}{(x+1)^2}\sqrt[4]{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^3}\mathrm{d}x.$

令 $t = \sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x-2}}$，即 $x = \dfrac{2t^4+1}{t^4-1}$，则 $\mathrm{d}x = \dfrac{-12t^3}{(t^4-1)^2}\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{(x-2)^3(x+1)^5}} = \int \frac{(t^4-1)^2}{9t^8}\cdot t^3\cdot\frac{-12t^3}{(t^4-1)^2}\mathrm{d}t = -\frac{4}{3}\int\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{4}{3t} + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-2}{x+1}} + C.$$

提高题

1. 求下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\tan x}\mathrm{d}x$；　(2) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$；　(3) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$；　(4) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+5x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

解　(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\tan x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x + \sin x + \cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int\left(1 + \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x + \int\frac{1}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}(\sin x + \cos x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(x + \ln|\cos x + \sin x|) + C.$$

(2) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\sin(\ln x) - \int\cos(\ln x)\mathrm{d}x$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\mathrm{d}x,$$

所以
$$\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$$

(3) 令 $x = \dfrac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \int\frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = -\int\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = -\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} - \int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

$$= -\arcsin t + \sqrt{1-t^2} + C = -\arcsin\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C.$$

(4) 设 $x=\tan t$，则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+5x^2)\sqrt{1+x^2}} = \int\frac{\sec^2 t\mathrm{d}t}{(1+5\tan^2 t)\sec t} = \int\frac{\sec t\mathrm{d}t}{1+5\tan^2 t} = \int\frac{\frac{1}{\cos t}}{1+5\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\mathrm{d}t$$

$$= \int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\cos^2 t + 5\sin^2 t} = \int\frac{\mathrm{d}\sin t}{1+4\sin^2 t} = \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+4\sin^2 t}\mathrm{d}(2\sin t)$$

$$= \frac{1}{2}\arctan(2\sin t) + C = \frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

2. 设 $f(\sin^2 x) = \dfrac{x}{\sin x}$，求 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$.

解　设 $u = \sin^2 x$，即 $\sin x = \sqrt{u}$，$x = \arcsin\sqrt{u}$，则 $f(u) = \dfrac{\arcsin\sqrt{u}}{\sqrt{u}}$，即 $f(x) = \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x=\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x=\int \arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}(-2\sqrt{1-x})=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+\int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$
$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C.$$

复习题 4

1. 填空题

(1) 已知 $\varphi(x)=2x+\mathrm{e}^{-x}$ 是 $f(x)$ 的原函数，是 $g(x)$ 的导函数，且 $g(0)=1$，则 $f(x)=$ ________；$g(x)=$ ________；

(2) 若 $f''(x)$ 连续，则 $\int xf''(x)\mathrm{d}x=$ ________；

(3) 若 $\mathrm{d}(\cos x)=f(x)\mathrm{d}x$，则 $\int xf(x)\mathrm{d}x=$ ________；

(4) 若 $f(x)$ 可导，则 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 一定________；

(5) 若 $f(x)$ 的某个原函数为常数，则 $f(x)$ ________.

解 (1) 答案：$2-\mathrm{e}^{-x}$；$x^2-\mathrm{e}^{-x}+2$.

因为 $\varphi(x)=2x+\mathrm{e}^{-x}$ 是 $f(x)$ 的原函数，所以 $f(x)=\varphi'(x)=2-\mathrm{e}^{-x}$. $\varphi(x)=2x+\mathrm{e}^{-x}$ 是 $g(x)$ 的导函数，所以 $g(x)=\int\varphi(x)\mathrm{d}x=x^2-\mathrm{e}^{-x}+C$. 又 $g(0)=1$，得 $C=2$，于是 $g(x)=x^2-\mathrm{e}^{-x}+2$.

(2) 答案：$xf'(x)-f(x)+C$.

$$\int xf''(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f'(x)=xf'(x)-\int f'(x)\mathrm{d}x=xf'(x)-f(x)+C.$$

(3) 答案：$x\cos x-\sin x+C$.

若 $\mathrm{d}(\cos x)=f(x)\mathrm{d}x$，则 $f(x)=-\sin x$，于是

$$\int xf(x)\mathrm{d}x=-\int x\sin x\mathrm{d}x=x\cos x-\int\cos x\mathrm{d}x=x\cos x-\sin x+C.$$

(4) 答案：存在.

若 $f(x)$ 可导，则 $f(x)$ 连续，所以 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 一定存在.

(5) 答案：0.

若 $f(x)$ 的某个原函数为常数，则 $f(x)=(C)'=0$.

2. 选择题

(1) 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2\mathrm{e}^{2x}+C$，则 $f(x)=$ (　　).

A. $2x\mathrm{e}^{2x}$　　B. $2x^2\mathrm{e}^{2x}$　　C. $4x\mathrm{e}^{2x}$　　D. $2x\mathrm{e}^{2x}(1+x)$.

(2) 若 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{\ln x}{x}$，则 $\int f'(x)\mathrm{d}x=$ (　　).

A. $\frac{\ln x}{x}+C$　　B. $\frac{1}{2}\ln^2x+C$　　C. $\ln|\ln x|+C$　　D. $\frac{1-\ln x}{x^2}+C$

(3) 原函数族 $f(x)+C$ 可写成(　　)形式.

A. $\int f'(x)\mathrm{d}x$　　B. $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'$　　C. $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x$　　D. $\int F'(x)\mathrm{d}x$

(4) 若 $f'(x^2)=\frac{1}{x}(x>0)$，则 $f(x)=$ (　　).

A. $2x+C$　　B. $\ln|x|+C$　　C. $2\sqrt{x}+C$　　D. $\frac{1}{\sqrt{x}}+C$

(5) 若 $F'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$F(1)=\frac{3}{2}\pi$，则 $F(x)=$ (　　).

A. $\arcsin x$　　B. $\arcsin x+\frac{\pi}{2}$　　C. $\arccos x+\pi$　　D. $\arcsin x+\pi$

解　(1) 因为 $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2\mathrm{e}^{2x}+C$，所以 $f(x)=(x^2\mathrm{e}^{2x})'=2x\mathrm{e}^{2x}(1+x)$，故选 D.

(2) 因为 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{\ln x}{x}$，所以 $f(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

而 $f(x)$ 又是 $f'(x)$ 的一个原函数，于是 $\int f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1-\ln x}{x^2}+C$，故选 D.

(3) 因为 $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$，所以选 A.

(4) 若 $f'(x^2)=\frac{1}{x}(x>0)$，即 $f'(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$，所以 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$，于是 $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x}+C$，故选 C.

(5) 因为 $F(x)=\int F'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C$. 又由 $F(1)=\frac{3}{2}\pi$，得 $C=\pi$，故选 D.

3. 若 $\int f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}+C$，求 $f(x)$.

解　因为 $\int f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}+C$，所以 $f'(\mathrm{e}^x)=(\mathrm{e}^{2x})'=2\mathrm{e}^{2x}$.

设 $t=\mathrm{e}^x$，则 $f'(t)=2t^2$，即 $f'(x)=2x^2$，于是 $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int 2x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^3+C$.

4. 设 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$.

解　因为 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，所以 $xf(x)=(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，即 $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$，故

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}(1-x^2)=-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C.$$

5. 设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$，且 $f[\varphi(x)]=\ln x$，求 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x$.

解　因为 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}=\ln\frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}$，所以 $f(t)=\ln\frac{t+1}{t-1}$. 由 $f[\varphi(x)]=\ln x$，得 $f[\varphi(x)]=\ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x$，即 $\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x$，解得 $\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$. 于是

$$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x=\int\frac{(x-1)+2}{x-1}\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x=x+2\ln|x-1|+C.$$

6. 求 $\int\left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}\right]\mathrm{d}x$.

解

$$\int\left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}\right]\mathrm{d}x=\int\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\cdot\frac{[f'^2(x)-f(x)f''(x)]}{f'^2(x)}\right]\mathrm{d}x=\int\frac{f(x)}{f'(x)}\mathrm{d}\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2+C.$$

7. 设 $f(\ln x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$，求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

解　设 $t=\ln x$，则 $x=\mathrm{e}^t$，由此得 $f(t)=\frac{\ln(\mathrm{e}^t+1)}{\mathrm{e}^t}$，即 $f(x)=\frac{\ln(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x}$，于是

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\ln(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\ln(\mathrm{e}^x+1)\mathrm{d}(-\mathrm{e}^{-x})=-\mathrm{e}^{-x}\ln(\mathrm{e}^x+1)+\int\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\ln(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x}+x-\ln(\mathrm{e}^x+1)+C.$$

8. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{x+\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；　(2) $\int \frac{x^2}{4+9x^2}\mathrm{d}x$；　(3) $\int x(1+x)^{100}\mathrm{d}x$；　(4) $\int \frac{\mathrm{e}^{-1/x^2}}{x^3}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{2}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$；　(6) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}\mathrm{d}x$；　(7) $\int \frac{2^x3^x}{9^x-4^x}\mathrm{d}x$；　(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(2+x^{10})}$；

(9) $\int \frac{7\cos x-3\sin x}{5\cos x+2\sin x}\mathrm{d}x$；　(10) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4-x^2}}$；　(11) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\mathrm{d}x$；　(12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^4}}$.

解 (1) $\int \frac{x+\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}-\int \arccos x\mathrm{d}\arccos x$

$$=-\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}(\arccos x)^2+C.$$

(2) $\int \frac{x^2}{4+9x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{9}\int \frac{(9x^2+4)-4}{4+9x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{9}\left(\int \mathrm{d}x-4\int \frac{1}{4+9x^2}\mathrm{d}x\right)$

$$=\frac{1}{9}\left(x-\frac{2}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{3}{2}x\right)\right)=\frac{1}{9}\left[x-\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{3}{2}x\right)\right]+C.$$

(3) 令 $1+x=u$，即 $x=u-1$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$，于是

$$\int x(1+x)^{100}\mathrm{d}x=\int (u-1)u^{100}\mathrm{d}u=\int u^{101}\mathrm{d}u-\int u^{100}\mathrm{d}u=\frac{u^{102}}{102}-\frac{u^{101}}{101}+C$$

$$=\frac{1}{102}(1+x)^{102}-\frac{1}{101}(1+x)^{101}+C.$$

(4) $\int \frac{\mathrm{e}^{-1/x^2}}{x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}+C.$

(5) $\int \frac{2}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=\int \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x=2\int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}+1}=2\arctan\mathrm{e}^x+C.$

(6) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}\mathrm{d}x=\int x(\sqrt{x^2+1}+x)\mathrm{d}x=\int x\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x+\int x^2\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int \sqrt{x^2+1}\mathrm{d}(x^2+1)+\frac{1}{3}x^3=\frac{1}{3}(\sqrt{x^2+1})^3+\frac{1}{3}x^3+C.$$

(7) $\int \frac{2^x3^x}{9^x-4^x}\mathrm{d}x=\int \frac{2^x3^x}{4^x\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-1\right]}\mathrm{d}x=\int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-1\right]}\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{t=\left(\frac{3}{2}\right)^x}\frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}=\frac{1}{\ln3-\ln2}\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}+C$$

$$=\frac{1}{2(\ln3-\ln2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|+C.$$

(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(2+x^{10})}=\int \frac{x^9\mathrm{d}x}{x^{10}(2+x^{10})}=\frac{1}{20}\int \left(\frac{1}{x^{10}}-\frac{1}{2+x^{10}}\right)\mathrm{d}(x^{10})$

$$=\frac{1}{20}[\ln x^{10}-\ln(x^{10}+2)]+C=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{20}\ln(x^{10}+2)+C.$$

(9) $\int \frac{7\cos x-3\sin x}{5\cos x+2\sin x}\mathrm{d}x=\int \frac{(5\cos x+2\sin x)+(2\cos x-5\sin x)}{5\cos x+2\sin x}\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}x+\int \frac{\mathrm{d}(5\cos x+2\sin x)}{5\cos x+2\sin x}$

$$=x+\ln|5\cos x+2\sin x|+C.$$

(10) 方法一　令 $\sqrt{4-x^2}=t$，即 $x^2=4-t^2$，则 $x\mathrm{d}x=-t\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4-x^2}}=\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{4-x^2}}=-\int \frac{t\mathrm{d}t}{t(4-t^2)}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2}\right|+C.$$

方法二 令 $x=2\sin t$，则 $dx=2\cos t dt$，于是

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}=\frac{1}{2}\int \frac{\cos t dt}{\sin t\cos t}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sin t}=\frac{1}{2}\ln|\csc t-\cot t|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2}\right|+C.$$

(11) 设 $x=2\sec t$，则 $dx=2\sec t\tan t dt$，于是

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx=\int \frac{2\tan t\cdot 2\sec t\tan t}{2\sec t}dt=2\int \tan^2 t dt=2\int(\sec^2 t-1)dt=2\tan t-2t+C$$

$$=\sqrt{x^2-4}-2\arccos\frac{2}{x}+C.$$

(12) 设 $x^2=\tan t$，则 $2xdx=\sec^2 t dt$，于是

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}}=\int \frac{xdx}{x^2\sqrt{1+x^4}}=\int \frac{\sec^2 t dt}{2\tan t\sec t}=\frac{1}{2}\int \csc t dt=\frac{1}{2}\ln|\csc t-\cot t|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^4}-1}{x^2}\right|+C.$$

9. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}dx$；　(2) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x dx$；　(3) $\int \frac{\ln\ln x}{x}dx$；

(4) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$；　(5) $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-3}}dx$；　(6) $\int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx$.

解 (1) $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}dx=\int \ln(1+x^2)d\left(-\frac{1}{2x^2}\right)=-\frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}+\int \frac{x}{x^2(1+x^2)}dx$

$$=-\frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$=-\frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

$$=\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}+C.$$

(2) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x dx=\int \arctan x dx-\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C.$

(3) $\int \frac{\ln\ln x}{x}dx=\int \ln\ln x d\ln x=\ln x\ln\ln x-\int \ln x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx=\ln x[\ln(\ln x)-1]+C.$

(4) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int x d\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}d(1+x^2)$$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{x^2+1}+C.$$

(5) 令 $\sqrt{e^x-3}=t$，即 $e^x=t^2+3, x=\ln(t^2+3)$，则 $dx=\frac{2t}{t^2+3}dt$，于是

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-3}}dx=\int \frac{\ln(t^2+3)(t^2+3)}{t}\cdot\frac{2t}{t^2+3}dt=2\int \ln(t^2+3)dt$$

$$=2[t\ln(t^2+3)-\int t d\ln(t^2+3)]=2\left[t\ln(t^2+3)-\int \frac{2t^2}{t^2+3}dt\right]$$

$$=2t\ln(t^2+3)-4\int \frac{t^2+3-3}{t^2+3}dt=2t\ln(t^2+3)-4\left(t-\int \frac{3}{t^2+3}dt\right)$$

$$= 2x\sqrt{e^x-3}-4\sqrt{e^x-3}+4\sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt{e^x-3}}{\sqrt{3}}+C.$$

(6) $\int\frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx=\int\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\int e^x\frac{\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{e^x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int e^x\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$$=e^x\tan\frac{x}{2}-\int e^x\tan\frac{x}{2}dx+\int e^x\tan\frac{x}{2}dx=e^x\tan\frac{x}{2}+C.$$

10. 设 $I_n=\int\tan^n x\,dx$，求证：$I_n=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}$，并求$\int\tan^5 x\,dx$.

解 $I_n=\int\tan^n x\,dx=\int\tan^{n-2}x\tan^2 x\,dx=\int\tan^{n-2}x(\sec^2x-1)dx$

$$=\int\tan^{n-2}x\sec^2x\,dx-\int\tan^{n-2}x\,dx=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}.$$

$I_5=\frac{1}{5-1}\tan^{5-1}x-I_{5-2}=\frac{1}{4}\tan^4x-I_3=\frac{1}{4}\tan^4x-\left(\frac{1}{2}\tan^2x-I_1\right)$

$$=\frac{1}{4}\tan^4x-\frac{1}{2}\tan^2x+\int\tan x\,dx=\frac{1}{4}\tan^4x-\frac{1}{2}\tan^2x-\ln|\cos x|+C.$$

11. 求下列不定积分：

(1) $\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$；　(2) $\int\frac{x^{11}dx}{x^8+3x^4+2}$；　(3) $\int\frac{1-x^8}{x(1+x^8)}dx$；

(4) $\int\frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$；　(5) $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$；　(6) $\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$；

(7) $\int\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}dx$；　(8) $\int\cos\sqrt{3x+2}\,dx$；　(9) $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$；

(10) $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx$.

解 (1) $\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx=\frac{1}{2}\int\frac{6x-2}{x^2-4x+8}dx=\frac{1}{2}\int\frac{6x-12+10}{x^2-4x+8}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{3(2x-4)}{x^2-4x+8}dx+\int\frac{5}{x^2-4x+8}dx$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2-4x+8)}{x^2-4x+8}dx+\int\frac{5}{(x-2)^2+4}d(x-2)$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x^2-4x+8|+\frac{5}{2}\arctan\frac{x-2}{2}+C.$$

(2) $\int\frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx=\int\frac{(x^{11}+3x^7+2x^3)-(3x^7+2x^3)}{x^8+3x^4+2}dx=\int x^3dx-\int\frac{3x^7+2x^3}{x^8+3x^4+2}dx$

$$=\int x^3dx-\int\frac{3x^7+2x^3}{(x^4+1)(x^4+2)}dx=\int x^3dx+\int\left(\frac{x^3}{x^4+1}-\frac{4x^3}{x^4+2}\right)dx$$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}\int\frac{d(x^4+1)}{x^4+1}-\int\frac{d(x^4+2)}{x^4+2}$$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}\ln(x^4+1)-\ln(x^4+2)+C=\frac{1}{4}x^4+\ln\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x^4+2}+C.$$

(3) $\int\frac{1-x^8}{x(1+x^8)}dx=\int\frac{(1-x^8)x^7}{x^8(1+x^8)}dx=\frac{1}{8}\int\frac{1-x^8}{x^8(1-x^8)}d(x^8)=\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{x^8}-\frac{2}{x^8+1}\right)d(x^8)$

$$=\frac{1}{8}\ln x^8-\frac{2}{8}\ln(x^8+1)+C=\ln|x|-\frac{1}{4}\ln(1+x^8)+C.$$

(4) $\int\frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=\int\frac{1}{3}\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+4}\right)dx=\frac{1}{3}\left(\int\frac{x}{x^2+1}dx-\int\frac{x}{x^2+4}dx\right)$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4}\right]$$
$$=\frac{1}{6}\ln(x^2+1)-\frac{1}{6}\ln(x^2+4)+C=\frac{1}{6}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+4}\right)+C.$$

(5) $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}=\int\left(\frac{-x}{x^2+1}+\frac{x+1}{x^2+x+1}\right)dx$
$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{2x+1+1}{x^2+x+1}dx$$
$$=-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

(6) $\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx=\int\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})dx=\int[(x+1)\sqrt{x}-x\sqrt{x+1}]dx$
$$=\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx-\int(x+1)^{\frac{3}{2}}dx+\int(x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$
$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

(7) 令 $t=x-1$,再令 $t=\frac{1}{u}$, 则
$$\int\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}dx=\int\frac{dt}{t\sqrt{t^2+2t-1}}=-\int\frac{du}{\sqrt{1+2u-u^2}}=-\int\frac{d(u-1)}{\sqrt{2-(u-1)^2}}$$
$$=-\arcsin\frac{u-1}{\sqrt{2}}+C=-\arcsin\frac{2-x}{\sqrt{2}(x-1)}+C.$$

(8) 令 $\sqrt{3x+2}=t$,即 $x=\frac{1}{3}(t^2-2)$,则 $dx=\frac{2}{3}tdt$, 于是
$$\int\cos\sqrt{3x+2}dx=\int\cos t\cdot\frac{2}{3}tdt=\frac{2}{3}\int td(\sin t)=\frac{2}{3}\left(t\sin t-\int\sin tdt\right)=\frac{2}{3}(t\sin t+\cos t)+C$$
$$=\frac{2}{3}(\sqrt{3x+2}\sin\sqrt{3x+2}+\cos\sqrt{3x+2})+C.$$

(9) 令 $\sqrt[4]{x}=t$,即 $x=t^4$,则 $dx=4t^3dt$, 于是
$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx=\int\frac{t^2}{t^3+1}\cdot4t^3dt=4\int\frac{t^5}{t^3+1}dt=4\int\frac{t^5+t^2-t^2}{t^3+1}dt=4\int t^2dt-4\int\frac{t^2}{t^3+1}dt$$
$$=\frac{4}{3}t^3-\frac{4}{3}\int\frac{d(t^3+1)}{t^3+1}=\frac{4}{3}t^3-\frac{4}{3}\ln(t^3+1)+C$$
$$=\frac{4}{3}[\sqrt[4]{x^3}-\ln(\sqrt[4]{x^3}+1)]+C.$$

(10) 令 $t=\ln x$,则 $dt=\frac{1}{x}dx$,于是 $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx=\int\frac{\sqrt{1+t}}{t}dt.$

再令 $u=\sqrt{1+t}$,即 $t=u^2-1$,则 $dt=2udu$, 于是
$$\int\frac{\sqrt{1+t}}{t}dt=2\int\frac{u^2}{u^2-1}du=2\int\frac{u^2-1+1}{u^2-1}du=2\left(\int du+\int\frac{1}{u^2-1}du\right)$$
$$=2u+\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C=2\sqrt{1+t}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt{1+t}+1}\right|+C.$$

所以, $$\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx=2\sqrt{1+\ln x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1}\right|+C.$$

12. 求 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int(\arcsin\sqrt{x}+2\ln\sqrt{x})\mathrm{d}\sqrt{x}$

$$\overset{t=\sqrt{x}}{=} 2\int(\arcsin t+2\ln t)\mathrm{d}t = 2\left[t\arcsin t-\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t+2t\ln t-2\int\mathrm{d}t\right]$$

$$= 2[t\arcsin t+\sqrt{1-t^2}+2t\ln t-2t]+C$$

$$= 2[\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\ln x-2\sqrt{x}]+C.$$

13. 设 $f(x)$的一个原函数 $F(x)>0$,且 $F(0)=1$. 当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)F(x)=\sin^2 2x$,求 $f(x)$.

解 $\int f(x)F(x)\mathrm{d}x = \int\sin^2 2x\mathrm{d}x = \frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin 4x+C_1$.

又 $\int f(x)F(x)\mathrm{d}x = \int F(x)\mathrm{d}F(x) = \frac{1}{2}F^2(x)+C_2$,从而 $F^2(x) = x-\frac{1}{4}\sin 4x+C(C=2C_1-2C_2)$.

代入 $F(0)=1$,得 $C=1$,即 $F^2(x) = x-\frac{1}{4}\sin 4x+1$. 而 $F(x)>0$,于是 $F(x)=\sqrt{x-\frac{1}{4}\sin 4x+1}$,

即 $f(x)=F'(x)=\dfrac{1-\cos 4x}{2\sqrt{x-\frac{1}{4}\sin 4x+1}}$.

自测题 4 答案

1. 填空题

解 (1) 因为 e^{-x} 是函数 $f(x)$ 的一个原函数,所以 $\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-x}+C$.

(2) 因为 $\int f(x)\mathrm{d}x = 2\cos\frac{x}{2}+C$,所以 $f(x) = \left(2\cos\frac{x}{2}\right)' = -\sin\frac{x}{2}$.

(3) $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)+C = \frac{1}{x}+C$.

(4) $\int f(x)\mathrm{d}f(x) = \frac{1}{2}f^2(x)+C$.

(5) $\int\sin x\cos x\mathrm{d}x = \int\sin x\mathrm{d}\sin x = \frac{\sin^2 x}{2}+C$.

2. 单项选择题

解 (1) 因为 $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\ln\sin 4x+C$, 所以 $f(x) = \left(\frac{3}{4}\ln\sin 4x\right)' = \frac{3}{4}\frac{\cos 4x}{\sin 4x}\cdot 4 = 3\cot 4x$,故选 D.

(2) 因为 $\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int\ln x\mathrm{d}\ln x = \frac{\ln^2 x}{2}+C$,所以选 B.

(3) $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = \mathrm{d}f(x)$,故 B 错;$\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)+C$, 故 C 错;$\int\mathrm{d}f(x) = f(x)+C$,故 D 错;而 $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = f(x)$ 正确. 故选 A.

(4) $\mathrm{d}(\sqrt{x}) = \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$ 故 B 错;$\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$,故 C 错; $\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$,故 D 错;$\mathrm{d}\sin^2 x = 2\sin x\cos x\mathrm{d}x = \sin 2x\mathrm{d}x$,故选 A.

(5) $\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$,故选 D.

3. 计算题

解 (1) $\int\frac{1}{9-4x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{3+2x}+\frac{1}{3-2x}\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\ln|3+2x| - \frac{1}{2}\ln|3-2x|\right) + C = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{3+2x}{3-2x}\right| + C.$$

(2) 设$\sqrt[6]{x}=t$，即 $x=t^6$，则 $\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x = \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^3}{t+1}\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^3+1-1}{t+1}\mathrm{d}t = 6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)+C = 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C.$$

(3) 设 $x=2\sec t$，则 $\mathrm{d}x=2\sec t\tan t\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{2\tan t}{2\sec t}2\sec t\tan t\mathrm{d}t = 2\int \tan^2 t\mathrm{d}t = 2\int(\sec^2 t-1)\mathrm{d}t$$

$$= 2(\tan t - t)+C = \sqrt{x^2-4}-2\arccos\frac{2}{x}+C.$$

(4) 令 $u=\arcsin x$，$\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$，则

$$\int \arcsin x\mathrm{d}x = x\arcsin x - \int x\mathrm{d}(\arcsin x) = x\arcsin x - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}+C.$$

(5) $$\int \frac{x+\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{\arctan x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)+\int \arctan x\mathrm{d}\arctan x$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\arctan^2 x+C.$$

(6) $$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}+\arctan x+C.$$

4. 综合题

解　(1) 由题意得 $y'=x+\mathrm{e}^x$，故

$$y = \int(x+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}+\mathrm{e}^x+C.$$

由 $y(0)=1+C=2$，得 $C=1$，故该曲线方程为 $y=\frac{x^2}{2}+\mathrm{e}^x+C$.

(2) 由题意得 $R(x)=\int(100-10x)\mathrm{d}x = 100x-5x^2+C$.

由 $R(0)=0$，得 $C=0$. 而 $R(x)=P(x)x$，即 $100x-5x^2=P(x)x$，从而得价格函数 $P(x)=100-5x$.

第 5 章

定积分及其应用

5.1 大纲要求及重点内容

1. 大纲要求

(1) 理解定积分的概念和基本性质,牢固掌握定积分概念,理解定积分是一种和式的极限,对用定积分解决问题的思想有初步体会.

(2) 理解变上限积分定义的函数及其求导,掌握牛顿-莱布尼茨公式,理解定积分和不定积分、微分和积分间的联系.

(3) 掌握定积分的换元法与分部积分法.

(4) 了解反常积分的概念并会计算反常积分.

(5) 理解定积分的来源、几何意义(平面图形的面积、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积).

2. 重点内容

(1) 定积分的计算、证明;

(2) 变上限积分的导数;

(3) 通过微元法求解应用问题,特别是求曲线围成的面积和旋转体的体积.

5.2 内容精要

1. 基本概念 **定积分的定义**$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

2. 几何意义

若 $f(x)\geqslant 0$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由 $x=a$,$x=b$,$y=f(x)$,x 轴围成的图形的面积.

3. 基本性质

性质 1 $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

性质 2 $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$($k$ 为常数).

性质 3 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

性质 4 $\int_a^b 1 \cdot \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a$.

性质 5 若在区间$[a,b]$上有 $f(x) \leqslant g(x)$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x(a < b)$.

推论 1 若在区间$[a,b]$上 $f(x) \geqslant 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0(a < b)$.

推论 2 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x(a < b)$.

性质 6(估值定理) 设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的最大值及最小值，则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

性质 7(定积分中值定理) 如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$上至少存在一个点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

4. 基本定理

(1)(牛顿-莱布尼茨公式)$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$，其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

(2) 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$x \in [a,b]$，则变上限函数$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是$f(x)$的一个原函数，即$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$.

(3) 推论 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t = f[v(x)]v'(x) - f[u(x)]u'(x)$.

5. 公式

(1) 设 $f(x)$在$[-l,l]$上连续，则

$\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x = 0(f(x)$ 奇函数$)$； $\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^l f(x)\mathrm{d}x(f(x)$ 偶函数$)$.

(2) 设 $f(x)$是以 T 为周期的连续函数，a 为任意的实数，则$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

(3) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶函数}, \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{3} \cdot 1, & \text{当 } n \text{ 为奇函数}. \end{cases}$$

(4) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi a^2}{4}$.

6. 反常积分

(1) 无限区间上的反常积分

① 设 $f(x)$ 在$[a + \infty)$上连续，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b \to +\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

② 设 $f(x)$ 在$(-\infty,b]$上连续，则$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{a \to -\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

③ 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

若以上极限存在，则称反常积分收敛，否则称反常积分发散.

(2) 无界函数的反常积分

① 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，b 为瑕点. 对任意的 $\varepsilon>0$ 且 $b-\varepsilon>a$，如果 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x$ 存在，称极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x$ 为无界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的反常积分.

② 若函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，且 a 为瑕点，则定义无界函数的反常积分为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

③ 若函数 $f(x)$ 在 $[a,c),(c,b]$ 内连续，$x=c$ 为 $f(x)$ 瑕点，则定义无界函数的积分为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon_1\to0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1}f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon_2\to0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

7. 定积分的应用

(1) 微元法　在 $[a,b]$ 上的任意子区间 $[u,u+\mathrm{d}u]$ 上建立所求量的微分 $\mathrm{d}M$ 与某一函数 $f(u)$ 及自变量 u 的微分 $\mathrm{d}u$ 之间的关系式：$\mathrm{d}M=f(u)\mathrm{d}u$，其中 $\mathrm{d}M$ 表示 M 的微元，$f(u)\mathrm{d}u$ 是所求量的局部表达式.

(2) 求平面图形的面积

Ⅰ. 直角坐标系中平面图形的面积 $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；

Ⅱ. 边界曲线为参数方程 $L:\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 的图形的面积 $S=\int_a^b y\mathrm{d}x=\int_?^?\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$，当 $x=a$ 时的 t 值做 $\int_?^?\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$ 的下限，当 $x=b$ 时的 t 值做 $\int_?^?\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$ 的上限.

(3) 旋转体的体积　$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x, V_y=\pi\int_c^{\mathrm{d}}\varphi^2(y)\mathrm{d}y$.

注　① 图形绕着平行于 x 轴的直线旋转的体积仍然对 x 积分；绕着平行于 y 轴的直线旋转的体积仍然对 y 积分.

② 如果曲线是 $y=f(x)$ 的图形，由 $0\leqslant y\leqslant f(x),a\leqslant x\leqslant b$ 绕着 y 轴旋转的体积

$$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

(4) 旋转体的侧面积　$y=f(x)\geqslant0,a\leqslant x\leqslant b,S_{侧}=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$.

5.3 题型总结与典型例题

题型 5-1　利用定积分求数列的极限

【解题思路】 根据定积分定义，它是 n 项和的极限，因此如果某数列的通项是 n 项和的形式时，可以用定积分来计算这样数列的极限. 利用定积分的定义，求某些数列的极限，关键是找到适当的被积函数和积分区间.

例 5.1 求极限：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sqrt{n}+\sqrt{2n}+\cdots+\sqrt{n^2})$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{\frac{k}{n}}}{n+ne^{\frac{2k}{n}}}$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sqrt{n}+\sqrt{2n}+\cdots+\sqrt{n^2})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{\dfrac{1}{n}}+\sqrt{\dfrac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\dfrac{n}{n}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{\frac{k}{n}}}{n+ne^{\frac{2k}{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{\frac{k}{n}}}{1+e^{2\frac{k}{n}}}\cdot\dfrac{1}{n}=\int_0^1\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\arctan e^x\Big|_0^1=\arctan e-\dfrac{\pi}{4}$.

题型 5-2 定积分的几何意义

【解题思路】 从定积分的具体表达式找被积函数和积分区间，然后根据被积函数和积分区间确定该定积分表示的平面图形的面积.

例 5.2 利用定积分的几何意义求下列定积分：

(1) $\int_0^2(2-x)dx$； (2) $\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx$.

解 (1) $\int_0^2(2-x)dx$ 表示直线 $x+y=2$ 与 x 轴、y 轴所围成的三角形的面积，于是

$$\int_0^2(2-x)dx=\frac{1}{2}\times2\times2=2.$$

(2) $\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx$ 表示圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的四分之一面积，即 $\dfrac{\pi}{4}$.

题型 5-3 有关定积分的性质问题

【解题思路】 若在区间 $[a,b]$ 上有 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx$. 利用定积分的比较性质比较两个定积分值的大小，主要是比较被积函数在积分区间上的大小. 设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，则 $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a)$. 利用定积分的估值性质来估计定积分值的大小，主要是求被积函数在积分区间上的最大值和最小值.

例 5.3 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x}{x}dx$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{\tan x}dx$，则（ ）.

A. $I_1>I_2>1$ B. $1>I_1>I_2$ C. $I_2>I_1>1$ D. $1>I_2>I_1$

解 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 内 $\tan x>x$，因为 $I_1-I_2=\dfrac{\tan^2x-x^2}{x\tan x}>0$，所以排除 C，D.

又因为 $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{\tan x}dx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\dfrac{\pi}{4}<1$，所以排除 A. 故选 B.

例 5.4 估计下列各积分值：

(1) $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}x\arctan x\,dx$； (2) $\int_2^0 e^{x-x^2}dx$.

解 (1) 设 $f(x)=x\arctan x$，$x\in\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$. 因为当 $x\in\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$ 时 $f'(x)=\arctan x+\dfrac{x}{1+x^2}>0$，所以 $f(x)$ 单调递增，于是

$$\max f(x) = f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \quad \min f(x) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{18},$$

因此 $\frac{\sqrt{3}\pi}{18} \leqslant f(x) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{3}}$,即 $\frac{\pi}{9} \leqslant \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x \leqslant \frac{2\pi}{3}$.

(2) 设 $f(x) = \mathrm{e}^{x-x^2}, x \in [0,2]$. 因为 $f'(x) = (1-2x)\mathrm{e}^{x-x^2}$,令 $f'(x) = 0$,得 $x = \frac{1}{2}$.
而 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}}, f(0) = 1, f(2) = \mathrm{e}^{-2}$,所以 $f(x)$ 在$[0,2]$上有最小值为 e^{-2},最大值为 $\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}$,故

$$2\mathrm{e}^{-2} \leqslant \int_0^2 \mathrm{e}^{x-x^2}\mathrm{d}x \leqslant 2\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}, \quad 即 -2\mathrm{e}^{\frac{1}{4}} \leqslant \int_2^0 \mathrm{e}^{x-x^2}\mathrm{d}x \leqslant -2\mathrm{e}^{-2}.$$

题型 5-4 定积分中值定理的应用

【解题思路】 如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则在$[a,b]$上至少存在一个点 ξ,使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)(a \leqslant \xi \leqslant b)$. 利用定积分的中值定理可以求极限、证明等式以及不等式问题.

例 5.5 设 $f(x)$ 可导,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$,求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)\mathrm{d}t$.

解 由积分中值定理知有 $\xi\in[x,x+2]$,使 $\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)\mathrm{d}t = \xi\sin\frac{3}{\xi}f(\xi)(x+2-x)$,
所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)\mathrm{d}t = 2\lim\limits_{\xi\to+\infty}\xi\sin\frac{3}{\xi}f(\xi) = 2\lim\limits_{\xi\to+\infty}3f(\xi) = 6$.

例 5.6 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且满足 $f(1) = k\int_0^{\frac{1}{k}} x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x$ $(k>1)$,证明至少存在一点 $\xi \in (0,1)$,使得 $f'(\xi) = (1-\xi^{-1})f(\xi)$.

证明 由定积分的中值定理知,存在 $x_0 \in \left(0,\frac{1}{k}\right)$,使得

$$k\int_0^{\frac{1}{k}} x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x = kx_0\mathrm{e}^{1-x_0}f(x_0)\cdot\frac{1}{k} = x_0\mathrm{e}^{1-x_0}f(x_0),于是\ f(1) = x_0\mathrm{e}^{1-x_0}f(x_0).$$

设 $F(x)=x\mathrm{e}^{1-x}f(x)$,则 $F(x)$在$[x_0,1]$上连续,在$(x_0,1)$内可导,且 $F'(x)=\mathrm{e}^{1-x}f(x)-x\mathrm{e}^{1-x}f(x)+x\mathrm{e}^{1-x}f'(x)$,于是 $F(1)=f(1)=x_0\mathrm{e}^{1-x_0}f(x_0)=F(x_0)$,所以,由罗尔定理知,存在 $\xi\in(x_0,1)\subset(0,1)$,使得 $F'(\xi)=0$,即 $\mathrm{e}^{1-\xi}[f(\xi)-\xi f(\xi)+\xi f'(\xi)]=0$,解得

$$f'(\xi) = (1-\xi^{-1})f(\xi).$$

题型 5-5 关于变上、下限积分的求导问题

【解题思路】 利用公式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\mathrm{d}t = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$,可以求变上、下限积分的导数. 如果被积函数中也含有变量 x,要么设法把 x 拿到积分号外面,要么通过变量代换把 x 换到积分的上、下限去. 如果隐函数或参数方程所表示的函数中有变上、下限积分,同样方法处理.

例 5.7 设 $f(x)$连续,求函数 $F(x) = \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$ 的导数.

解 因为 $F(x) = \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t = x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$,所以

$$F'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

例 5.8 设 $f(x)$连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(x^2+t)\mathrm{d}t$，求 $\varphi'(x)$.

解 因为 $\varphi(x)=\int_0^1 f(x^2+t)\mathrm{d}t \xlongequal{u=x^2+t} \int_{x^2}^{x^2+1} f(u)\mathrm{d}u$，所以

$$\varphi'(x)=2xf(x^2+1)-2xf(x^2)=2x[f(x^2+1)-f(x^2)].$$

题型 5-6 带有变上、下限积分的未定式极限的计算

【解题思路】 未定式极限的计算中如果有变上、下限积分，一般用洛必达法则，把含有变上、下限积分的部分作为分子或分母，求导后可去掉积分号. 如果积分号里面有变量，要提到积分号外或通过换元变到积分上、下限，然后再求导.

例 5.9 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} te^t\sin t\mathrm{d}t}{x^6 e^x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{x^2\sin 2x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} te^t\sin t\mathrm{d}t}{x^6 e^x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2e^{x^2}\sin(x^2)\cdot 2x}{6x^5e^x+x^6e^x}\xlongequal{\sin x^2\sim x^2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^5e^{x^2}}{x^5(6+x)e^x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}}{(6+x)e^x}=\frac{1}{3}.$$

(2) 由洛必达法则及无穷小的替代法，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{x^2\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x^2}}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2xe^{x^2}}{12x}=-\frac{1}{6}.$$

题型 5-7 含有“变上限积分”或“定积分”的方程

【解题思路】 含有“变上限积分”的方程，通常对方程两边求导或多次求导，求 $f(x)$. 含有“定积分”的方程，通常采取两边积分的方法求 $f(x)$.

例 5.10 设 $f(x)$为连续函数，且$\int_0^{2x} xf(t)\mathrm{d}t+2\int_x^0 tf(2t)\mathrm{d}t=2x^3(x-1)$，求 $f(x)$.

解 把 $\int_0^{2x} xf(t)\mathrm{d}t+2\int_x^0 tf(2t)\mathrm{d}t=2x^3(x-1)$ 两边对 x 求导，得

$$\int_0^{2x} f(t)\mathrm{d}t+2xf(2x)-2xf(2x)=8x^3-6x^2,\quad 即\quad \int_0^{2x} f(t)\mathrm{d}t=8x^3-6x^2.$$

把上式两边再对 x 求导，得 $2f(2x)=24x^2-12x$，即 $f(2x)=12x^2-6x$. 于是

$$f(x)=3x^2-3x.$$

例 5.11 已知 $f(x)$ 满足方程 $f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

解 设 $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=C$，则 $f(x)=3x-C\sqrt{1-x^2}$，于是$\int_0^1(3x-C\sqrt{1-x^2})^2\mathrm{d}x=C$.

积分得 $3+\frac{2}{3}C^2-2C=C$，从而得 $C=3$ 或 $C=\frac{3}{2}$. 所以

$$f(x)=3x-3\sqrt{1-x^2},\quad 或\quad f(x)=3x-\frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}.$$

题型 5-8 用换元法计算定积分

【解题思路】 定积分的换元法与不定积分的换元积分法类似，但在作定积分换元 $x=\varphi(t)$ 时还应注意：①$x=\varphi(t)$ 应为区间 $[\alpha,\beta]$ 上的单值且有连续导数的函数；②换限要伴随换元同时进行；③求出新的被积函数的原函数后，无须再回代成原来变量，只要把相应的积分限代入计算即可.

例 5.12 求下列定积分：

(1) $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$； (2) $\int_0^6 \frac{1}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}dx$； (3) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.

解 (1) 令 $x=\tan t$，则 $dx=\sec^2 t dt$，于是

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 t dt}{(1+\tan^2 t)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}.$$

(2) 令 $t=\sqrt[3]{4-x}$，即 $x=4-t^3$，则 $dx=-3t^2 dt$，且当 $x=0$ 时，$t=\sqrt[3]{4}$，当 $x=6$ 时，$t=-\sqrt[3]{2}$. 于是 $\int_0^6 \frac{1}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}dx=\int_{\sqrt[3]{4}}^{-\sqrt[3]{2}} \frac{-3t^2}{t^2}dt=3(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})$.

(3) 方法一 $$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx \xlongequal[x=t^2]{t=\sqrt{x}} 2\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}dt=2\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \arcsin t \, d\arcsin t$$

$$=\arcsin^2 t\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1=\frac{3\pi^2}{16}.$$

方法二 $$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx \xlongequal{x=\sin^2 u} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cdot 2\sin u\cos u}{\sin u\cos u}du=u^2\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi^2}{16}.$$

题型 5-9 用定积分的换元法证明等式

【解题思路】 用定积分的换元法证明等式，要根据被积函数上、下限的特点及其构成情况来选择证明. ①若等式的一端为被积函数 $f(x)$，另一端为 $f[\varphi(t)]$，则令 $x=\varphi(t)$ 进行换元；②若等式的一端为 $f(x)$，另一端也为 $f(x)$ 或 $f(u)$，则从积分上、下限出发寻找换元；③若被积函数含有三角函数，一般从诱导公式出发，兼顾 $f(x)$ 与上、下限进行换元.

例 5.13 证明以下各题：

(1) $\int_0^a x^3 f(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx\,(a>0)$；(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^m x dx=2^{-m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx$.

证明 (1) 令 $u=x^2$，则 $du=2xdx$，于是

$$\int_0^a x^3 f(x^2)dx=\int_0^a x^2 f(x^2)xdx=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} uf(u)du=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx.$$

(2) 左边 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2^m}\sin^m 2x dx=2^{-m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m 2x dx$.

令 $2x=\frac{\pi}{2}-t$，即 $x=\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}$，则

$$左边=2^{-m}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos^m t\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt=2^{-m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t dt=右边.$$

题型 5-10 用定积分的换元法证明不等式

【解题思路】 定积分不等式的证明通常用定积分的比较定理、估值不等式、积分上限函数的单调性、微分与积分中值定理、泰勒公式等. 有时要构造辅助函数 $F(x)$，求 $F(x)$的导数，讨论 $F(x)$的单调性，并与 $F(x)$的端点值比较，从而得出不等式. 涉及更高阶导数用泰勒公式证明.

例 5.14 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f(x)>0$，求证 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2$.

证明 设 $F(t)=\int_a^t f(x)\mathrm{d}x\int_a^t \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x-(t-a)^2$，则

$$F'(t)=f(t)\int_a^t \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x+\frac{1}{f(t)}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x-2(t-a)=\int_a^t\left[\frac{f(t)}{f(x)}+\frac{f(x)}{f(t)}-2\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^t\left[\sqrt{\frac{f(t)}{f(x)}}-\sqrt{\frac{f(x)}{f(t)}}\right]^2\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

$F(x)$为单调增函数，且 $F(a)=0$，所以 $F(b)\geqslant F(a)>0$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant (b-a)^2.$$

例 5.15 设 $f(x)$在$[0,a]$上二阶可导，且 $f''(x)\geqslant 0$，证明 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant af\left(\frac{a}{2}\right)$.

证明 $f(x)$在$\frac{a}{2}$处的一阶泰勒公式为

$$f(x)=f\left(\frac{a}{2}\right)+f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2,$$

其中，ξ 在 x 与$\frac{a}{2}$之间. 利用条件 $f''(x)\geqslant 0$，可得 $f(x)\geqslant f\left(\frac{a}{2}\right)+f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right)$. 两边从 0 到 a 取积分，得 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant af\left(\frac{a}{2}\right)+f'\left(\frac{a}{2}\right)\int_0^a\left(x-\frac{a}{2}\right)\mathrm{d}x=af\left(\frac{a}{2}\right)$.

注 已知 $f(x)$二阶可导，可考虑利用 $f(x)$的一阶泰勒公式估计 $f(x)$；又所证的不等式中出现了点$\frac{a}{2}$，故考虑使用在 $x_0=\frac{a}{2}$处的泰勒公式.

题型 5-11 用分部积分法计算定积分

【解题思路】 定积分的分部积分法的基本原则与不定积分的分部积分法类似，在 u，$\mathrm{d}v$ 的选择方面，按照不定积分的分部积分法的思路进行. 当被积函数中含有抽象函数的导数形式时，常用分部积分法. 对于被积函数中含有变上、下限积分的定积分的情况，常用的方法也是利用分部积分法，把变上限或变下限积分取作 u，其余部分取作 $\mathrm{d}v$. 这类题目的另一种做法是将原积分化为二重积分(微积分(下册)的内容)，再更换累次积分的次序.

例 5.16 求下列定积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$； (3) $\int_1^{\mathrm{e}}\cos(\ln x)\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^3 x}\mathrm{d}(\cos x)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\mathrm{d}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\cos^2 x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

(2) $\int_0^1 e^{\sqrt{1-x}}dx \xlongequal{\sqrt{1-x}=t} -\int_1^0 e^t \cdot 2t dt = 2\int_0^1 te^t dt = 2\left(te^t\Big|_0^1 - e^t\Big|_0^1\right) = 2.$

(3) $$\int_1^e \cos(\ln x)dx = [x\cos(\ln x)]\Big|_1^e + \int_1^e x\sin(\ln x)\frac{1}{x}dx$$
$$= e\cos 1 - 1 + \int_1^e \sin(\ln x)dx = e\cos 1 - 1 + x\sin(\ln x)\Big|_1^e - \int_1^e \cos(\ln x)dx$$
$$= e\cos 1 - 1 + e\sin 1 - \int_1^e \cos(\ln x)dx,$$

则 $2\int_1^e \cos(\ln x)dx = e\cos 1 + e\sin 1 - 1$，故 $\int_1^e \cos(\ln x)dx = \frac{1}{2}[e(\cos 1 + \sin 1) - 1]$.

例 5.17 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上具有二阶连续导数，$f'(\pi)=3$，且 $\int_0^\pi [f(x)+f''(x)]\cos x dx = 2$，求 $f'(0)$.

解 $$\int_0^\pi [f(x)+f''(x)]\cos x dx = \int_0^\pi f(x)d\sin x + \int_0^\pi \cos x df'(x)$$
$$= \sin x \cdot f(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \cdot f'(x)dx + \cos x \cdot f'(x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \sin x \cdot f'(x)dx$$
$$= -f'(\pi) - f'(0) = 2.$$

故 $f'(0) = -2 - f'(\pi) = -2 - 3 = -5$.

例 5.18 计算 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x)dx$，其中 $f(x) = \int_0^x e^{-y^2+2y}dy$.

解 $$\int_0^1 (x-1)^2 f(x)dx = \int_0^1 (x-1)^2\left[\int_0^x e^{-y^2+2y}dy\right]dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3\int_0^x e^{-y^2+2y}dy\right]\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}(x-1)^3 e^{-x^2+2x}dx$$
$$= -\frac{1}{6}\int_0^1 (x-1)^2 e^{-(x-1)^2+1}d[(x-1)^2]$$
$$\xlongequal{t=(x-1)^2} -\frac{e}{6}\int_1^0 te^{-t}dt = \frac{1}{6}(e-2).$$

题型 5-12 带有绝对值的定积分的计算

【解题思路】 被积函数中有绝对值的定积分的计算，应注意的是正确地确定分界点，先去掉绝对值. 去掉绝对值的方法有两种，一是令含绝对值部分的函数为零，求出其实根，以其实根为分界点，将被积函数化成分段函数；二是利用函数的奇偶性、周期性等性质，使绝对值符号去掉.

例 5.19 求下列定积分：

(1) $\int_{e^{-2}}^{e^2} \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}dx$；　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}dx$；　(3) $\int_{-2}^2 (x+|x|e^{-x}|)dx$.

解 (1) $$\int_{e^{-2}}^{e^2} \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}dx = \int_{e^{-2}}^1 \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}dx + \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$$
$$= -2\sqrt{x}\ln x\Big|_{e^{-2}}^1 + 2\int_{e^{-2}}^1 \frac{\sqrt{x}}{x}dx + 2\sqrt{x}\ln x\Big|_0^{e^2} - 2\int_1^{e^2}\frac{\sqrt{x}}{x}dx$$
$$= -\frac{4}{e} + 2\int_{e^{-2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx + 4e - 2\int_1^{e^2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$=-\frac{4}{e}+4\sqrt{x}\Big|_{e^{-2}}^{1}+4e-4\sqrt{x}\Big|_{1}^{e^2}=8\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\,dx$$

$$=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{2}-2.$$

(3) $\int_{-2}^{2}(x+|x|e^{-|x|})\,dx=\int_{-2}^{2}x\,dx+\int_{-2}^{2}|x|e^{-|x|}\,dx=2\int_0^2 xe^{-x}\,dx$

$$=-2xe^{-x}\Big|_0^2+2\int_0^2 e^{-x}\,dx=-4e^{-2}-2e^{-x}\Big|_0^2=2-6e^{-2}.$$

题型 5-13　分段函数的定积分的计算

【解题思路】 分段函数的积分应分段计算，应注意的是正确地确定分界点，当被积函数是以给定函数与某一简单函数复合而成的函数时，要通过变量代换将其化为给定函数的形式.

例 5.20 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, x\leqslant 0,\\ e^{-x}, x>0,\end{cases}$ 求 $\int_1^3 f(x-2)\,dx$.

解 令 $t=x-2$，则 $dx=dt$，于是

$$\int_1^3 f(x-2)\,dx=\int_{-1}^{1}f(t)\,dt=\int_{-1}^{0}(1+t^2)\,dt+\int_0^1 e^{-t}\,dt=\left(t+\frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0}-e^{-t}\Big|_0^1=\frac{7}{3}-\frac{1}{e}.$$

例 5.21 计算下列定积分：

(1) $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,dt$，其中 $f(x)=\begin{cases}kx, & 0\leqslant x\leqslant \frac{l}{2},\\ c, & \frac{l}{2}<x\leqslant l;\end{cases}$

(2) $\int_0^x f(t)g(x-t)\,dt\ (x\geqslant 0)$，其中当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x$，而

$$g(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2},\\ 0, & x\geqslant \frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

解 (1) 当 $0\leqslant x\leqslant \frac{l}{2}$ 时，$\Phi(x)=\int_0^x kt\,dt=\frac{1}{2}kx^2$.

当 $\frac{l}{2}<x\leqslant l$ 时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^{\frac{l}{2}}kt\,dt+\int_{\frac{l}{2}}^{x}c\,dt=\frac{1}{8}kl^2+c\left(x-\frac{l}{2}\right)$. 因此

$$\Phi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}kx^2, & 0\leqslant x\leqslant \frac{l}{2},\\ \frac{1}{8}kl^2+c\left(x-\frac{l}{2}\right), & \frac{l}{2}<x\leqslant l.\end{cases}$$

(2) $\int_0^x f(t)g(x-t)\,dt\xlongequal{u=x-t}\int_x^0 f(x-u)g(u)(-du)=\int_0^x f(x-u)g(u)\,du.$

当 $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\int_0^x f(x-u)g(u)\mathrm{d}u=\int_0^x (x-u)\sin u\mathrm{d}u=x-\sin x$；

当 $x\geqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$\int_0^x f(x-u)g(u)\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-u)\sin u\mathrm{d}u+0=x-1$. 因此

$$\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t=\begin{cases}x-\sin x, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ x-1, & x\geqslant\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

题型 5-14　反常积分的计算

【解题思路】 ①确定反常积分的类型：判断是无穷限的反常积分还是无界函数的反常积分；②求被积函数的原函数；③求反常积分值，判断其收敛性.

例 5.22　计算 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$.

解　分母的阶数较高，可利用倒代换，令 $x=\frac{1}{t}$，则

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}=\int_1^0\frac{-t^4}{\sqrt{1+t^5+t^{10}}}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^4\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^5+t^{10}}}.$$

再令 $u=t^5$，则

$$\int_0^1\frac{t^4\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^5+t^{10}}}=\frac{1}{5}\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+u+1}}=\frac{1}{5}\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{u^2+u+1}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

例 5.23　计算反常积分 $\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$.

解　被积函数有两个可疑的瑕点：$x=0$ 和 $x=1$.

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}=1$，所以 $x=1$ 是被积函数的唯一瑕点. 从而

$$\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=(\arcsin\sqrt{x})^2\Big|_0^1=\frac{\pi^2}{4}.$$

题型 5-15　平面图形的面积

【解题思路】 ①画出平面图形，借助于几何直观了解所求面积的特点，确定积分变量；②求出相关的交点，确定积分区间；③合理选择积分曲线方程(直角坐标方程，参数方程，或极坐标方程)，代入公式计算；④当图形具有对称性或由几个面积相等部分所组成时，可先求出一部分面积，再利用对称性或等积性求全面积.

例 5.24　求下列各平面图形的面积 S：

(1) 平面图形是由曲线 $y=\cos x$，$y=\sin x$，$x=0$ 以及 $x=\pi$ 所围成；

(2) 平面图形是由曲线 $y=-x+\frac{3}{2}$ 和 $x=4y^2$ 所围成.

解 (1) 由于曲线 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的交点坐标为 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$(如图 5-1(a)所示),因此平面图形的面积为

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{2}.$$

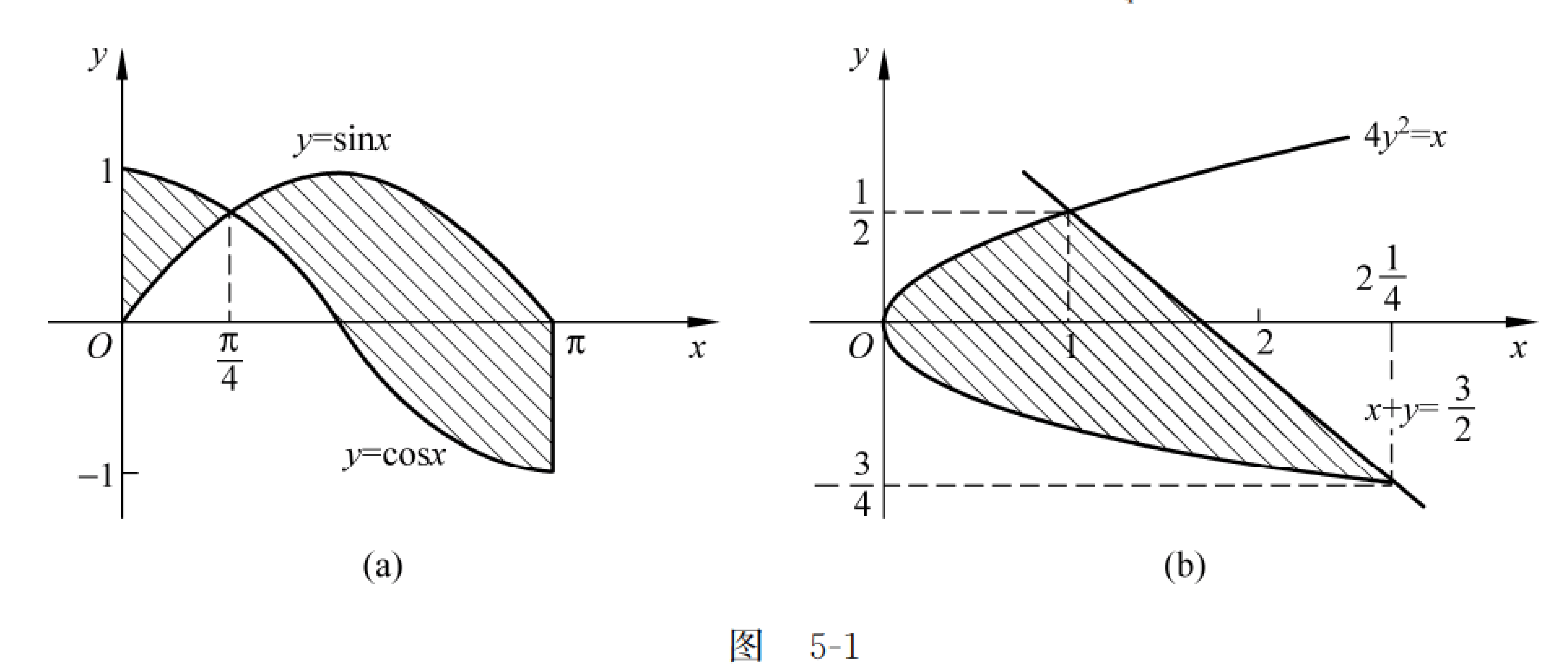


图 5-1

(2) 由于曲线 $y=-x+\frac{3}{2}$ 与 $x=4y^2$ 的交点为 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$和$\left(2\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)$(如图 5-1(b)所示). 这里我们选择 y 为积分变量,因此平面图形面积为

$$S=\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{3}{2}-y\right)-4y^2\right]\mathrm{d}y=\left(\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}y^2-\frac{4}{3}y^3\right)\Big|_{-\frac{3}{4}}^{\frac{1}{2}}=\frac{125}{96}.$$

例 5.25 已知星形线的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$$(a>0)$,试求它所围图形的面积.

解 根据图形的对称性(如图 5-2 所示),可得它所围的面积为

$$A=4\int_0^a y\mathrm{d}x=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}a\sin^3 t\,3a\cos^2 t(-\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2[\sin^4 t-\sin^6 t]\mathrm{d}t=12a^2\left[\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{5}{6}\right)\right]=\frac{3\pi}{8}a^2.$$

例 5.26 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$与 $r=a(a>0)$所围成部分的面积.

解 画出草图(如图 5-3 所示),由图所求面积为 3 个部分:

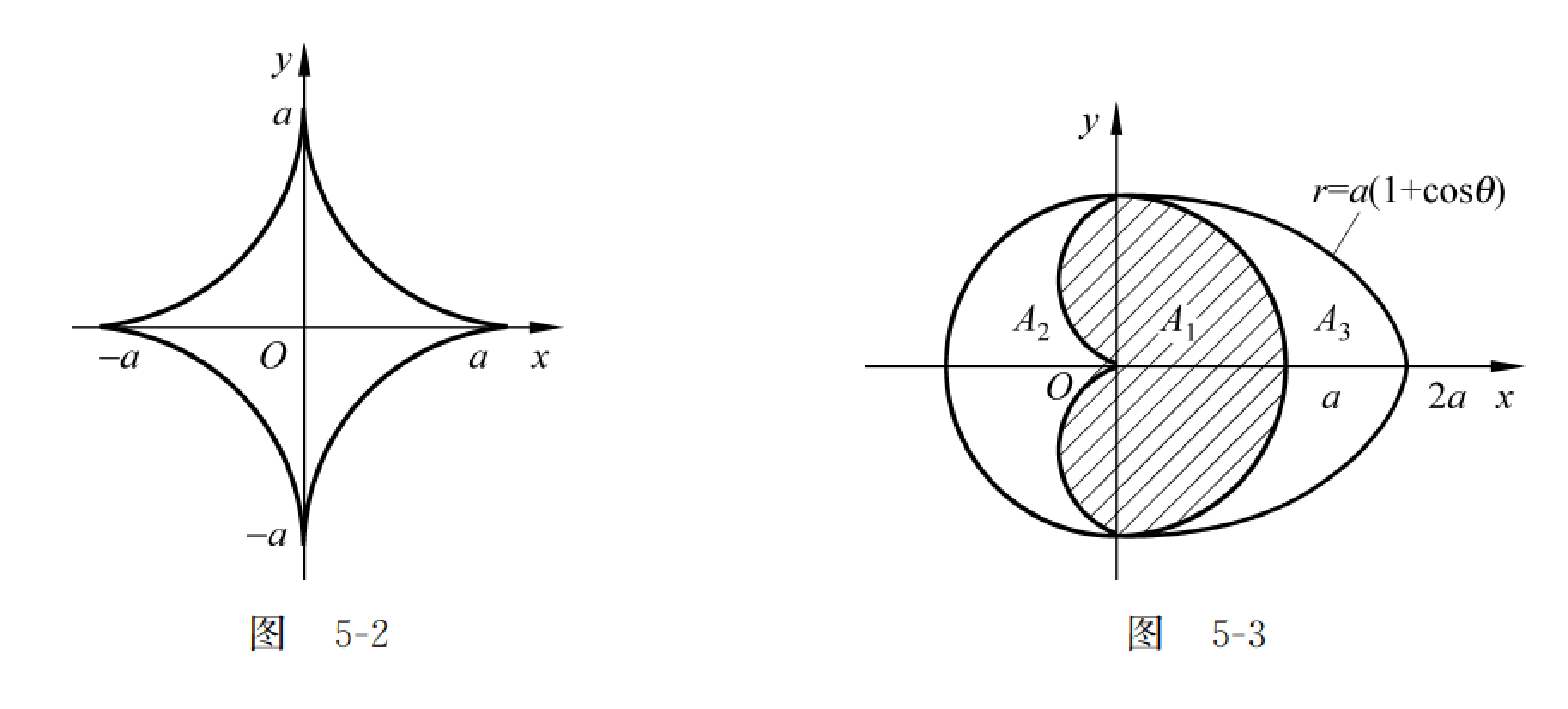


图 5-2　　图 5-3

(1) 圆内、心脏线内公共部分的面积为 A_1；(2)圆内、心脏线外公共部分的面积为 A_2；(3)圆外、心脏线内公共部分的面积为 A_3.

根据图形的对称性,可计算上半部分的面积再乘 2 即可.

先求交点,由 $\begin{cases} r=a(1+\cos\theta), \\ r=a, \end{cases}$ 得 $\left(\dfrac{\pi}{2},a\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{2},a\right)$,于是 A_1 可视为 y 轴左侧的一部分 $\left(\text{极角由}\dfrac{\pi}{2}\text{变到}\dfrac{3}{2}\pi\right)$与 y 轴右侧的半圆合起来的,故

$$A_1 = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta + \frac{\pi}{2}a^2 = a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta + \frac{\pi}{2}a^2$$

$$= \frac{\pi}{2}a^2 + a^2\left(\frac{3}{4}\pi - 2\right) = a^2\left(\frac{5}{4}\pi - 2\right),$$

$$A_2 = \pi a^2 - A_1 = a^2\left(2 - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$A_3 = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta - a^2\left(\frac{5}{4}\pi - 2\right) = a^2\left(2+\frac{\pi}{4}\right),$$

$\left(A_1+A_3=\dfrac{3}{2}\pi a^2 \text{ 就是心脏线所围成的面积}\right)$.

例 5.27 试求由曲线 $y=x\mathrm{e}^x$ 与 x 轴的负半轴所围平面图形的面积.

解 如图 5-4 所示,由于 $x=0$ 时,$y=0$;$x\to-\infty$时,$y=x\mathrm{e}^x\to 0$,故取 x 为积分变量,$x\in(-\infty,0]$,在任意部分区间$[x,x+\mathrm{d}x]$上相应的面积元素为 $\mathrm{d}A=|x\mathrm{e}^x|\mathrm{d}x$,从而,所求面积为 $A=\int_{-\infty}^{0}|x\mathrm{e}^x|\mathrm{d}x=-\int_{-\infty}^{0}x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=1$.

题型 5-16 旋转体的体积

【解题思路】 用定积分求旋转体的体积时,要恰当选取积分变量. 求绕 x 轴或平行于 x 轴的直线旋转的旋转体体积时,一般选 x 为积分变量. 求绕 y 轴或平行于 y 轴的直线旋转的旋转体的体积时,一般选 y 为积分变量.

例 5.28 求由曲线 $y=x^2-2x$ 及直线 $y=0$,$x=1$,$x=3$ 所围成的平面图形的面积 S,并分别求该平面图形绕 x 轴及绕 y 轴旋转所得到的立体的体积.

解 画草图(如图 5-5 所示).

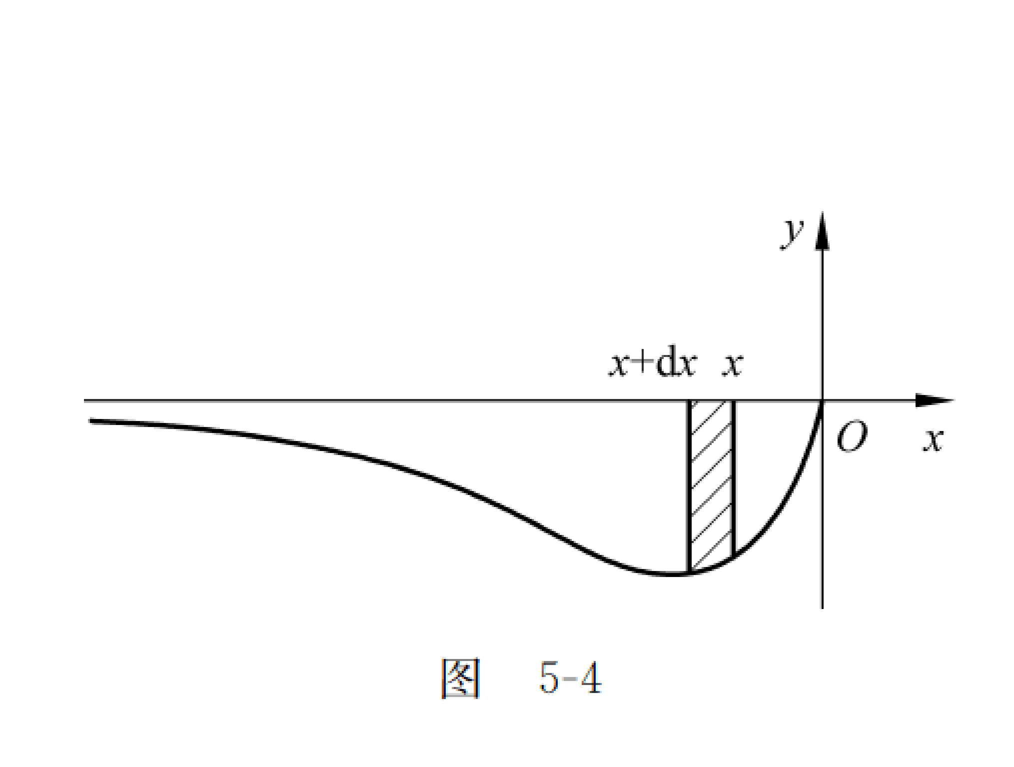


图 5-4

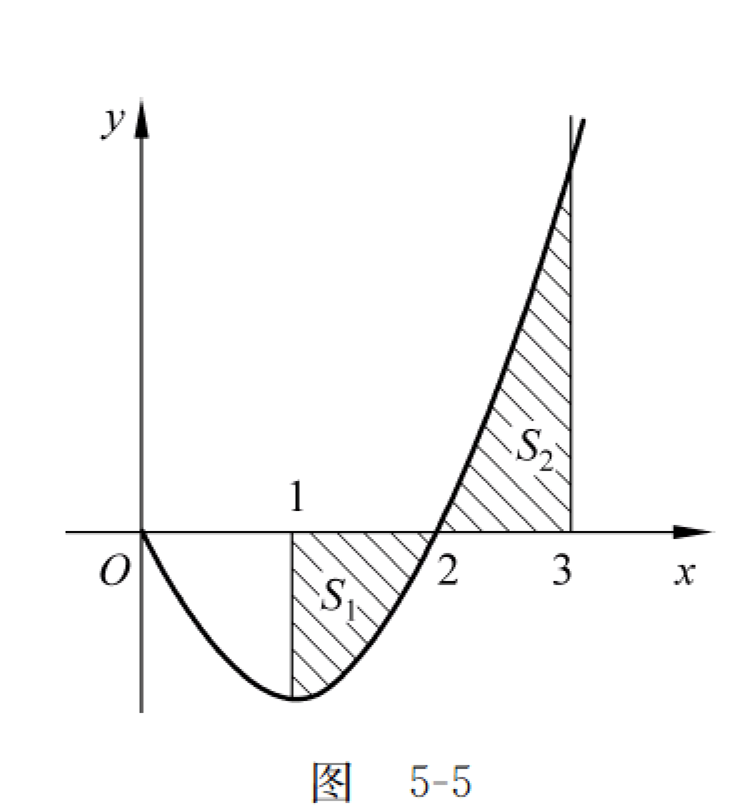


图 5-5

面积：$S=S_1+S_2=\int_1^2(2x-x^2)\mathrm{d}x+\int_2^3(x^2-2x)\mathrm{d}x$

$$=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2+\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big|_2^3=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2.$$

绕 x 轴旋转的体积为

$$V_x=\pi\int_1^3(x^2-2x)^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^3(x^4-4x^3+4x^2)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_1^3=\frac{46}{15}\pi.$$

S_1 绕 y 轴旋转一周形成的立体体积为

$$V_1=\pi\int_{-1}^0\left(1+\sqrt{1+y}\right)^2\mathrm{d}y-\pi=\pi\int_{-1}^0\left(1+2\sqrt{1+y}+1+y\right)\mathrm{d}y-\pi=\frac{11}{6}\pi.$$

S_2 绕 y 轴旋转一周形成的立体体积为

$$V_2=27\pi-\pi\int_0^3\left(1+\sqrt{1+y}\right)^2\mathrm{d}y=27\pi-\pi\int_0^3\left(2+2\sqrt{1+y}+y\right)\mathrm{d}y=\frac{43}{6}\pi.$$

故绕 y 轴旋转一周形成的立体体积，$V_y=V_1+V_2=\frac{11}{6}\pi+\frac{43}{6}\pi=9\pi$.

如以 x 为积分变量，更为简单. $V_y=2\pi\left[\int_1^2x(2x-x^2)\mathrm{d}x+\int_2^3(x^2-2x)\mathrm{d}x\right]=9\pi$.

此处注意 S_1 在 x 轴下方，故体积前加一负号.

例 5.29　过原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D. 求：

(1) D 的面积；

(2) D 绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转一周所形成的旋转体的体积.

解　(1) 设曲线 $y=\ln x$ 在 $(t,\ln t)$ 点处的切线为 $y-\ln t=\frac{x}{t}-1$，由于切线要过原点，因而得 $\ln t=1$，即 $t=\mathrm{e}$，切点为 $(\mathrm{e},1)$，于是切线方程为 $y=\frac{x}{\mathrm{e}}$，从而 D 的图形如图 5-6 所示. 选 y 为积分变量. 则 D 的面积为 $A=\int_0^1(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}y)\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}}{2}-1$.

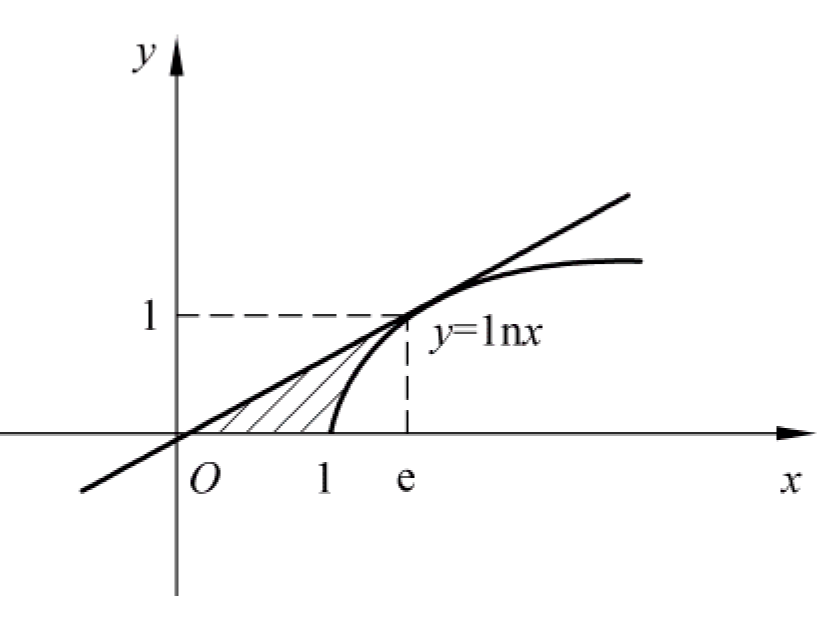


图　5-6


(2) 切线 $y=\frac{x}{\mathrm{e}}$、x 轴及直线 $x=\mathrm{e}$ 所围成三角形绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转一周所得圆锥体的体积 $V_1=\pi\mathrm{e}^2/3$，而由 $y=\ln x$、x 轴以及直线 $x=\mathrm{e}$ 所围曲边三角形绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体，其旋转轴 $x=\mathrm{e}$ 为平行于 y 轴的直线，故选 y 为积分变量，于是体积为 $V_2=\pi\int_0^1(\mathrm{e}-\mathrm{e}^y)^2\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}(4\mathrm{e}-1-\mathrm{e}^2)$，因此所求旋转体的体积为

$$V=V_1-V_2=\frac{\pi}{6}(5\mathrm{e}^2-12\mathrm{e}+3).$$

例 5.30　求曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕 $y=3$ 旋转而成的立体体积.

解　$y=3-|x^2-1|$ 与 x 轴交点是 $(-2,0)$，$(2,0)$. 曲线 $y=f(x)=3-|x^2-1|$ 围成的平面图形如图 5-7 所示. 显然做垂直分割方便，任取 $[x,x+\mathrm{d}x]\subset[-2,2]$ 相应的小窄曲边梯形绕 $y=3$ 旋转而成的立体体积，于是

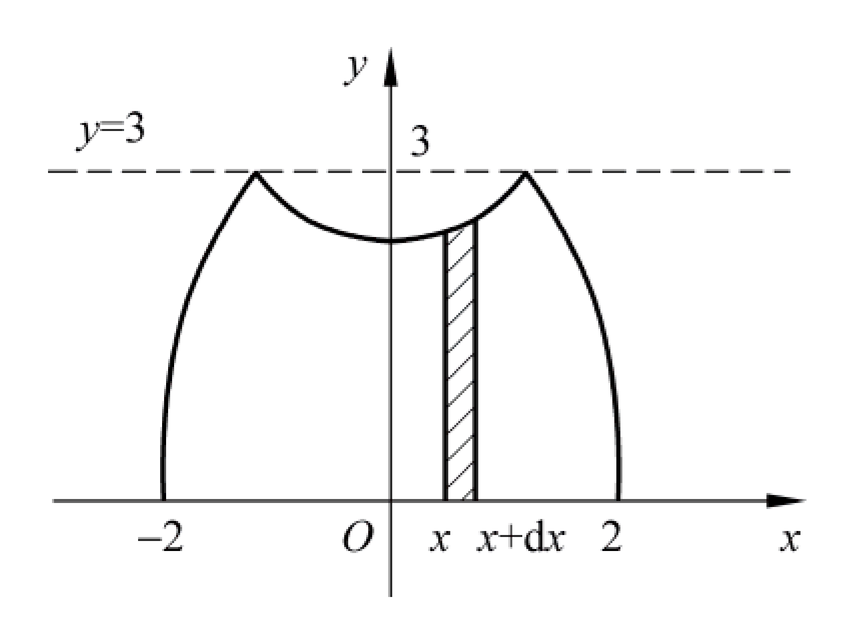


图 5-7

$$dV=\pi[3^2-(3-f(x))^2]dx=\pi[9-|x^2-1|^2]dx,$$

$$V=\pi\int_{-2}^{2}[9-(x^2-1)^2]dx=2\pi\int_0^2[9-(x^4-2x^2+1)]dx$$

$$=2\pi\left[18-\left(\frac{1}{5}\times2^5-\frac{2}{3}\times2^3+2\right)\right]=\frac{448}{15}\pi.$$

5.4 课后习题解答

习题 5.1

1. 利用定积分的定义,试求下列定积分:

(1) $\int_0^1 2x\,dx$; (2) $\int_0^1 e^x\,dx$.

解 (1) 因函数 $f(x)=2x$ 在$[0,1]$上连续,故可积. 从而定积分的值与对区间$[0,1]$的分法及 ξ_i 的取法无关. 为便于计算,将$[0,1]$ n 等分,则 $\lambda=\Delta x_i=\frac{1}{n}$. 于是 $\lambda\to0$,即 $n\to\infty$,取每个小区间的右端点 ξ_i,则 $\xi_i=\frac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n)$,故

$$\int_0^1 2x\,dx=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}2\xi_i\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2\,\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

(2) 因函数 $f(x)=e^x$ 在$[0,1]$上连续,故可积. 从而定积分的值与对区间$[0,1]$的分法及 ξ_i 的取法无关. 为便于计算,将$[0,1]$ n 等分,则 $\lambda=\Delta x_i=\frac{1}{n}$. 于是 $\lambda\to0$,即 $n\to\infty$,取每个小区间的右端点 ξ_i,则 $\xi_i=\frac{i}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$,故

$$\int_0^1 e^x\,dx=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}e^{\xi_i}\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{n(1-e^{\frac{1}{n}})}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{n\left(-\frac{1}{n}\right)}=e-1.$$

2. 利用定积分的几何意义,计算下列定积分:

(1) $\int_1^2 2x\,dx$; (2) $\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$.

解 (1) $\int_1^2 2x\,dx$ 表示直线 $y=2x$ 与 $x=1,x=2,x$ 轴所围成的直角梯形的面积,即 $\frac{1}{2}\times(2+4)\times1=3$.

(2) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ 表示八分之一圆 $x^2+y^2=1$ 的面积减去由直线 $y=x$ 与 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 及 x 轴所围成的直角三角形的面积，即 $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$.

3. 利用定积分表示下列极限：

(1) $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i^{\ 2}-3\xi_i)\Delta x_i$，$\lambda$ 是$[-3,5]$上的分割；　(2) $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{4-\xi_i^{\ 2}}\Delta x_i$，$\lambda$ 是$[0,2]$上的分割；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]$.

解　(1) $\int_{-3}^{5}(x^2-3x)\,dx$；　(2) $\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$；　(3) $\int_0^1\sin(\pi x)\,dx$；　(4) $\int_0^1\ln(1+x)\,dx$.

提高题

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}$.

解　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\frac{(i+1)^2}{n}}<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\frac{i^2}{n}}$，而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{(i+1)^2}{n}}&=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{n+\frac{1}{n}}+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n+\frac{(i+1)^2}{n}}+\frac{1}{n+\frac{(n+1)^2}{n}}\right]\\&=0+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+\left(\frac{i+1}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}+0=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

所以，由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}=\frac{\pi}{4}$.

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx\\&=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

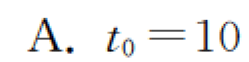
3. 设 $a_n=\sqrt[n^2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$ ________.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx\\&=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e^{\frac{1}{4}}$，即应填 $e^{\frac{1}{4}}$.

4. 甲、乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10(单位：m)处(如图 5-8 所示)，实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$(单位：m/s)，虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$，三块阴影部分的面积分别为 10，20，3，计时开始后乙追上甲的时刻为 t_0，则(　　).



A. $t_0=10$　　　　B. $15<t_0<20$

C. $t_0=25$　　　　D. $t_0>25$

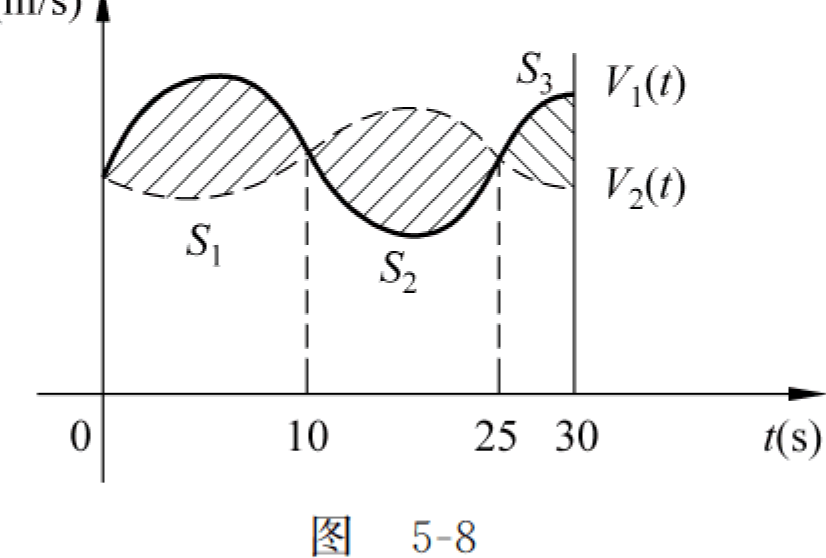


图 5-8

解　从 0 到 t_0 这段时间内甲、乙的位移分别为 $\int_0^{t_0}V_1(t)\mathrm{d}t$，$\int_0^{t_0}V_2(t)\mathrm{d}t$.

若乙要追上甲，则 $\int_0^{t_0}[V_2(t)-V_1(t)]\mathrm{d}t=10$，当 $t_0=25$ 时满足，故选 C.

5. 设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1$，$f(0)=-1$，且 $f''(x)>0$，则(　　).

A. $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x>0$　　　　B. $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x<0$

C. $\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x>\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$　　　　D. $\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x<\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

解　$f(x)$ 为偶函数满足题设，此时 $\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，故排除 C，D.

取 $f(x)=2x^2-1$ 满足条件，则 $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(2x^2-1)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}<0$，故选 B.

6. 函数 $f(x)=3^{x^2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\ln[f(1)f(2)\cdot\cdots\cdot f(n)]$.

解　$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\ln[f(1)f(2)\cdot\cdots\cdot f(n)]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\ln f(k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\ln 3^{k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}\ln 3$$
$$=\ln 3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\ln 3\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{\ln 3}{3}.$$

习题 5.2

1. 设 $f(x)$ 在[0,4]上连续，而且 $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=4$，$\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=7$，求下列各值.

(1) $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x$；　　　　(2) $\int_4^3 f(x)\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=7-4=3$；

(2) $\int_4^3 f(x)\mathrm{d}x=-\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x=-3$.

2. 比较定积分的大小：

(1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$；　　　　(2) $\int_3^4(\ln x)^2\mathrm{d}x$ 与 $\int_3^4(\ln x)^3\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$；　　　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$.

解　(1) 因为当 $x\in[0,1]$ 时，$x^2\geqslant x^3$，等号仅在 $x=0$ 和 $x=1$ 时成立，所以 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x>\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$；

(2) 因为当 $x\in[3,4]$ 时，$\ln x>1$，所以 $(\ln x)^2<(\ln x)^3$，所以 $\int_3^4(\ln x)^2\mathrm{d}x<\int_3^4(\ln x)^3\mathrm{d}x$；

(3) 因为当 $x\in[0,1]$ 时，$\mathrm{e}^x\geqslant\mathrm{e}^{x^2}$，等号仅在 $x=0$ 和 $x=1$ 时成立，所以 $\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x>\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$；

(4) 设 $g(x)=x-\sin x$，则 $g(0)=0$，$g'(x)=1-\cos x\geqslant 0$. 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$g'(x)\geqslant 0$，即 $g(x)$ 在

$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调增加，故 $g(x)\geqslant g(0)=0$，即 $x\geqslant \sin x$，于是$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$.

3. 估计定积分的值：

(1) $\int_1^4(x^2+1)\mathrm{d}x$；　(2) $\int_0^{\pi}(1+\sin x)\mathrm{d}x$；　(3) $\int_0^2 e^{x^2-x}\mathrm{d}x$；

(4) $\int_0^1\dfrac{x^2+3}{x^2+2}\mathrm{d}x$；　(5) $\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$；　(6) $\int_0^{\pi}\dfrac{1}{3+\sin^3 x}\mathrm{d}x$.

解　(1) 因为当 $x\in[1,4]$ 时，$2\leqslant x^2+1\leqslant 17$，所以$\int_1^4 2\mathrm{d}x\leqslant\int_1^4(x^2+1)\mathrm{d}x\leqslant\int_1^4 17\mathrm{d}x$，于是

$$6\leqslant\int_1^4(x^2+1)\mathrm{d}x\leqslant 51;$$

(2) 当 $x\in[0,\pi]$ 时，$1\leqslant 1+\sin x\leqslant 2$，所以$\int_0^{\pi}1\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\pi}(1+\sin x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\pi}2\mathrm{d}x$，于是

$$\pi\leqslant\int_0^{\pi}(1+\sin x)\mathrm{d}x\leqslant 2\pi;$$

(3) 当 $x\in[0,2]$ 时，$-\dfrac{1}{4}\leqslant x^2-x=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\leqslant 2$，所以 $e^{-\frac{1}{4}}\leqslant e^{(x^2-x)}\leqslant e^2$，因此

$$\int_0^2 e^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^2 e^{(x^2-x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^2 e^2\mathrm{d}x,\quad 即\quad 2e^{-\frac{1}{4}}\leqslant\int_0^2 e^{(x^2-x)}\mathrm{d}x\leqslant 2e^2;$$

(4) 因为当 $x\in[0,1]$ 时，$\dfrac{4}{3}\leqslant\dfrac{x^2+3}{x^2+2}=1+\dfrac{1}{x^2+2}\leqslant\dfrac{3}{2}$，所以$\dfrac{4}{3}\leqslant\int_0^1\dfrac{x^2+3}{x^2+2}\mathrm{d}x\leqslant\dfrac{3}{2}$；

(5) 当 $x\in[0,1]$ 时，$0\leqslant\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(x-1)^2}\leqslant 1$，所以

$$\int_0^1 0\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\mathrm{d}x,\quad 即\quad 0\leqslant\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x\leqslant 1;$$

(6) $f(x)=\dfrac{1}{3+\sin^3 x}$，$x\in[0,\pi]$，因为 $0\leqslant\sin^3 x\leqslant 1$，所以 $\dfrac{1}{4}\leqslant\dfrac{1}{3+\sin^3 x}\leqslant\dfrac{1}{3}$，故

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^3 x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\pi}\frac{1}{3}\mathrm{d}x,\quad 于是\quad \frac{\pi}{4}\leqslant\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^3 x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{3}.$$

4. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=0$.

证明　由积分中值定理知，至少存在 $\xi_n\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$，使得$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\dfrac{\xi_n^n}{1+\xi_n}\cdot\dfrac{1}{2}$. 因为 $0\leqslant\xi_n\leqslant\dfrac{1}{2}$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n^n=0$，而$\left\{\dfrac{1}{1+\xi_n}\right\}$有界，于是$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=0$.

5. 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $k\int_{1-\frac{1}{k}}^1 f(x)\mathrm{d}x=f(0)$，$k>1$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$.

证明　由积分中值定理可知，存在 $\eta\in\left[1-\dfrac{1}{k},1\right]$，使得 $f(0)=k\int_{1-\frac{1}{k}}^1 f(x)\mathrm{d}x=k\cdot\dfrac{1}{k}f(\eta)=f(\eta)$. 再由罗尔定理可知，存在 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$，使即 $f'(\xi)=0$.

6. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，证明：

(1) 若在$[a,b]$上，$f(x)\geqslant 0$，且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，则在$[a,b]$上 $f(x)\equiv 0$；

(2) 若在$[a,b]$上，$f(x)\geqslant 0$，且 $f(x)$ 不恒等于零，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

证明　(1) 反证法. 假设在(a,b)内有一点 x_0，使得 $f(x_0)>0$，由 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续可知，必有 x_0 的 δ 邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 使 $f(x)>0$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{x_0-\delta}f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x>\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\mathrm{d}x>0.$$

这与已知 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾. 对 $x_0=a$ 和 $x_0=b$ 同理可证,故在 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 0$.

(2) 因为 $f(x)\geqslant 0$,所以 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$. 假设 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$,则由(1)结论可得在 $[a,b]$ 上,$f(x)\equiv 0$,这与 $f(x)$ 不恒等于零矛盾,故 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

7. 若 $f(x)$ 在 $[2,6]$ 上连续,且 $f(x)$ 在 $[2,6]$ 上的平均值为 4, 求 $\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x$.

解 因为 $\dfrac{\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x}{4}=4$,所以 $\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x=16$.

提高题

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续,在 $(0,3)$ 内存在二阶导数,且 $2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)+f(3)$. 证明:(1) 存在 $\eta\in(0,2)$ 使 $f(\eta)=f(0)$;(2) 存在 $\xi\in(0,3)$,使 $f''(\xi)=0$.

【分析】 需要证明的结论与导数有关,自然联想到用微分中值定理.

证明 (1) 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 因 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 上连续,所以 $F(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 上连续,在开区间 $(0,2)$ 内可导,由拉格朗日中值定理得,至少存在一点 $\eta\in(0,2)$,使得 $F(2)-F(0)=F'(\eta)(2-0)$,即 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(\eta)$. 又 $2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$,所以 $f(\eta)=f(0)$. 命题(1)得证.

(2) 因为 $2f(0)=f(2)+f(3)$,则 $f(0)=\dfrac{f(2)+f(3)}{2}$. 又函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,3]$ 上连续,从而 $f(0)=\dfrac{f(2)+f(3)}{2}$ 介于 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上的最大值与最小值之间,由介值定理知,至少存在一点 $\gamma\in[2,3]$,使得 $f(\gamma)=f(0)$.

因此 $f(x)$ 在区间 $[0,\eta]$,$[0,\gamma]$ 上都满足罗尔中值定理条件,于是至少存在点 $\xi_1\in(0,\eta)$,$\xi_2\in(\eta,\gamma)$,使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.

由 $f(x)$ 在闭区间 $[0,3]$ 上连续,在开区间 $(0,3)$ 内存在二阶导数,知 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续,在 (ξ_1,ξ_2) 可导,用罗尔中值定理,至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,3)$,使得 $f''(\xi)=0$.

习题 5.3

1. 求下列函数的导数:

(1) $\int_0^x \sin e^t\,\mathrm{d}t$;　(2) $\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$;　(3) $\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t$;　(4) $\int_0^x xf(t)\,\mathrm{d}t$.

解 (1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x \sin e^t\,\mathrm{d}t\right)=\sin e^x$.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)=e^{-x^4}(x^2)'=2xe^{-x^4}$.

(3)
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t\right)&=\cos(\pi\cos^2 x)(\cos x)'-\cos(\pi\sin^2 x)(\sin x)'\\&=\cos(\pi\cos^2 x)(-\sin x)-\cos(\pi\sin^2 x)(\cos x)\\&=\cos[\pi(1-\sin^2 x)](-\sin x)-\cos(\pi\sin^2 x)(\cos x)\\&=\cos(\pi\sin^2 x)\sin x-\cos(\pi\sin^2 x)(\cos x)=\cos(\pi\sin^2 x)(\sin x-\cos x).\end{aligned}$$

(4) 因为 $\int_0^x xf(t)\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,所以 $\left(\int_0^x xf(t)\mathrm{d}t\right)'=xf(x)+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

2. 求由 $\int_0^y e^t\mathrm{d}t+\int_0^x \cos t\mathrm{d}t=0$ 所决定的隐函数对 x 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 在方程两边同时对 x 求导得 $\frac{d}{dx}\left(\int_0^y e^t dt\right)+\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \cos t dt\right)=0$，于是 $e^y\frac{dy}{dx}+\cos x=0$，即 $\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x}{e^y}$. 而由 $\int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t dt=0$ 得，$e^y-1+\sin x=0$，即 $e^y=1-\sin x$，于是 $\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x}{1-\sin x}$.

3. 求由参数表达式 $x=\int_0^t \sin u du$，$y=\int_0^t \cos u du$ 所给定的函数 y 对 x 的导数.

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d\left(\int_0^t \cos u du\right)}{dt}}{\frac{d\left(\int_0^t \sin u du\right)}{dt}}=\frac{\cos t}{\sin t}=\cot t.$$

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \arctan t dt}{x^2}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2}$； (3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin t dt}{x^2}$； (4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{1+x^2}}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \arctan t dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{2x}=\frac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot e^{-\cos^2 x}}{2x}=\frac{1}{2e}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin t dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sin x\cdot\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x}{2x}=\frac{1}{2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(\arctan x)^2}{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}=\frac{\pi^2}{4}$.

5. 求下列函数的定积分：

(1) $\int_{-1}^8\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$； (2) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx$； (3) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$；

(4) $\int_0^1 |2x-1| dx$； (5) $\int_0^{2\pi}|\sin x| dx$； (6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x dx$.

解 (1) $\int_{-1}^8\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^8=\frac{81}{8}$.

(2) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\arctan\sqrt{3}-\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$.

(3) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

(4) 因为 $|2x-1|=\begin{cases}1-2x, & x\leqslant\frac{1}{2},\\ 2x-1, & x>\frac{1}{2},\end{cases}$ 所以

$$\int_0^1 |2x-1| dx=\int_0^{1/2}(1-2x)dx+\int_{1/2}^1(2x-1)dx=(x-x^2)\Big|_0^{1/2}+(x^2-x)\Big|_{1/2}^0=\frac{1}{2}.$$

(5) $\int_0^{2\pi}|\sin x| dx=\int_0^\pi \sin x dx+\int_\pi^{2\pi}(-\sin x)dx=(-\cos x)\Big|_0^\pi+\cos x\Big|_\pi^{2\pi}=4$.

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x-1)dx=\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{2}x^2, & x>1,\end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x+1)\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^1+\frac{x^3}{6}\Bigg|_1^2=\frac{3}{2}+\frac{8}{6}-\frac{1}{6}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}.$$

7. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t(0\leqslant x\leqslant 2)$.

解 $\Phi(x)=\begin{cases}\int_0^x t^2\mathrm{d}t, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \int_0^1 t^2\mathrm{d}t+\int_1^x(2-t)\mathrm{d}t, & 1<x\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\dfrac{x^2}{2}+2x-\dfrac{7}{6}, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

8. 设 $f(x)$ 连续，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$.

解 对 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ 两边积分，得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\int_0^1 1\mathrm{d}x,$$

于是 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}$，即 $f(x)=x-1$.

9. 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $F(x)=\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t$，讨论 $F(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 $F(x)=\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_{-1}^x(t+1)\mathrm{d}t, & x<0\\ \int_{-1}^0(t+1)\mathrm{d}t+\int_0^x t\mathrm{d}t, & x\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{1}{2}, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}, & x\geqslant 0.\end{cases}$

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=F(0)$，即 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

又因为 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\frac{x^2}{2}+x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x}=0$，所以 $F(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

10. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)>0$，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$，证明：

(1) $F'(x)\geqslant 2$;　　(2) 方程 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内有且只有一个根.

证明 (1) $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{f^2(x)+1}{f(x)}\geqslant\dfrac{2f(x)}{f(x)}=2$.

(2) $F(a)=\int_a^a f(t)\mathrm{d}t+\int_b^a\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=\int_b^a\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0$，$F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+\int_b^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0$.

由连续函数介值定理可知，在 (a,b) 内必有 ξ 使得 $F(\xi)=0$. 又因为 $F'(x)>0$，故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，从而方程 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内必有且仅有一根.

提高题

1. 已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n+1}\cdot f\left(\dfrac{2}{n}\right)=$________.

解 $y'(x)=e^{-\arctan^2 x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$，$y'(0)=f'(0)=e^0\cdot 1=1$，$f(0)=y(0)=0$，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}\cdot 2=2f'(0)=2.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)\sin t^2\,dt}{x^2\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}=$ ________.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x \sin t^2\,dt-\int_0^x t\sin t^2\,dt}{x^2\cdot\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\sin t^2\,dt+x\sin x^2-x\sin x^2}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{6x^2}=\dfrac{1}{6}$.

3. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)\,dt$，则当 $n\geqslant 2$ 时，$f^{(n)}(0)=$ ________.

解 由 $f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)\,dt$，得 $f(0)=1$，且 $f'(x)=2(x+1)+2f(x)$，故 $f'(0)=4$，

$f''(x)=2+2f'(x)$， $f''(0)=10$， $f'''(x)=2f''(x)$， $f'''(0)=2\times 10$，

$f^{(4)}(x)=2f'''(x)$， $f^{(4)}(0)=2^2\times 10,\cdots,f^{(n)}(x)=2f^{(n-1)}(x)$， $f^{(n)}(0)=2^{n-2}\times 10(n\geqslant 2)$.

从而 $f^{(n)}(0)=5\times 2^{n-1}(n\geqslant 2)$，故应填 $5\times 2^{n-1}(n\geqslant 2)$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，且满足关系式 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+x^3\int_0^1 f(x)\,dx$，$f(x)$ 的表达式为 $f(x)=$ ________.

解 两边取积分得

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx+\int_0^1 f(x)\,dx\cdot\int_0^1 x^3\,dx=\arctan x\Big|_0^1+\int_0^1 f(x)\,dx\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\int_0^1 f(x)\,dx,$$

即 $\dfrac{3}{4}\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{\pi}{4}$，故 $\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{\pi}{3}$. 于是 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{\pi}{3}x^3$，即应填 $f(x)+\dfrac{\pi}{3}x^3$.

5. 设 $\alpha(x)=\int_0^x (e^{t^2}-1)\,dt$，$\beta(x)=\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$，当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的________阶无穷小.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^{t^2}-1)\,dt}{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^{t^2}-1)\,dt}{\tan x-\sin x}\cdot\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^{t^2}-1)\,dt}{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}\cdot 2=2\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^{t^2}-1)\,dt\cdot\cos x}{\sin x\cdot\frac{1}{2}x^2}=4\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^{t^2}-1)\,dt}{x^3}$$
$$=4\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{3x^2}=4\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{4}{3}.$$

故 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶无穷小，应填“同”.

6. 把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\,dt$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt$ 排队，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是( ).

A. α,β,γ B. α,γ,β C. β,α,γ D. β,γ,α

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x\cos t^2\,dt}{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x^2}{2x\cdot\tan\sqrt{x}}=\infty$，即 β 是 α 的高阶无穷大，排除 C，D.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\beta}{\gamma}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt}{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x\cdot 2x}{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{4x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}=0,$$

即 β 是 γ 的高阶无穷小，故应选 B.

7.（如图 5-9 所示）连续函数 $y=f(x)$ 在区间$[-3,-2]$，$[2,3]$上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间$[-2,0]$，$[0,2]$上的图形分别是直径为 2 的上、下半圆周，设 $F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}t$. 则下列结论正确的是（　　）.

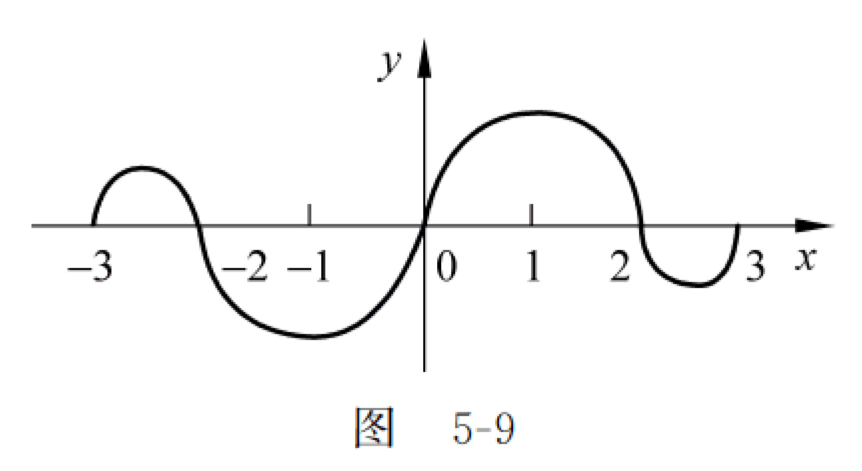


图　5-9

A. $F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$　　　　B. $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$

C. $F(3)=\frac{3}{4}F(2)$　　　　D. $F(3)=-\frac{5}{4}F(-2)$

解　$F(3)=\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t+\int_2^3 f(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}\pi$,

$F(-2)=\int_0^{-2}f(t)\mathrm{d}t=-\int_{-2}^0 f(t)\mathrm{d}t=-\left(-\frac{1}{2}\pi\right)=\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3}{4}F(-2)=-\frac{3}{8}\pi$,

A，D 错.

$$\frac{3}{4}F(2)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\pi=\frac{3}{8}\pi=F(3).$$

故应选 C.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sin^2 ax+4x^2}{e^{x^2}-1}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{6\int_0^x \sin at^2\,dt}{x-\tan x}, & x>0.\end{cases}$

（1）a 取何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

（2）a 取何值时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

解　$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{2\sin^2 ax+4x^2}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{2\sin^2 ax+4x^2}{x^2}=2a^2+4$,

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{6\int_0^x \sin at^2\,dt}{x-\tan x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{6\sin ax^2}{1-\sec^2 x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{6ax^2}{-x^2}=-6a$.

令 $2a^2+4=-6a$，得 $a=-1$，$a=-2$.

当 $a=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)=6$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续；当 $a=-2$ 时，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq f(0)$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

9. 设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y}e^{-t^2}\,dt=\int_0^x x\sin t^2\,dt$ 确定，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ ________.

解　由题设可得 $e^{-(x+y)}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=\int_0^x \sin t^2\,dt+x\sin x^2$.

当 $x=0$ 时，由题设可得 $\int_0^y e^{-t^2}\,dt=0$，而 $e^{-t^2}>0(t>0)$，故得 $y=0$，取 $x=0$，$y=0$ 代入上式得

$$1+\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0,\quad 故\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=-1.$$

故应填 -1.

10. 设函数 $f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|\mathrm{d}t(x>0)$，求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

解 $f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_0^x(x^2-t^2)\mathrm{d}t+\int_x^1(t^2-x^2)\mathrm{d}t, & 0<x<1\\ \int_0^1(x^2-t^2)\mathrm{d}t, & x\geqslant 1\end{cases}$

$=\begin{cases}\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}, & 0<x<1,\\ x^2-\frac{1}{3}, & x\geqslant 1,\end{cases}$

故 $f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x, & 0<x<1,\\ 2x, & x\geqslant 1.\end{cases}$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{2}$，且 $f''\left(\frac{1}{2}\right)>0$，所以 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得最小值 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

11. 设函数 $f(x)=\int_0^1 t|t-x|\mathrm{d}t$，求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值与最小值.

解 $f(x)=\int_0^1 t|t-x|\mathrm{d}t=\int_0^x t(x-t)\mathrm{d}t+\int_x^1 t(t-x)\mathrm{d}t=\frac{x^3}{3}-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}$，$f'(x)=x^2-\frac{1}{2}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. 而 $f(0)=\frac{1}{3}$，$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$，$f(1)=\frac{1}{6}$，则最小值为 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$，最大值为 $f(0)=\frac{1}{3}$.

习题 5.4

1. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$； (3) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$； (4) $\int_{-1}^1\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}}$；

(5) $\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$； (6) $\int_0^{\pi}\cos^4 x\sin x\mathrm{d}x$； (7) $\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$； (8) $\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1+\ln x}{x}\mathrm{d}x$；

(9) $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2 x-\sin^4 x}\mathrm{d}x$； (10) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

解 (1) 设 $x=\sqrt{2}\sin t$，则 $\mathrm{d}x=\sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t$. 当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=\sqrt{2}$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$. 于是

$$\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-2\sin^2 t}\cdot\sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}+\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}.$$

(2) 设 $x=\sin t$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$，当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=1$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$. 于是

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sin 4t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi}{16}.$$

(3) 设 $x=\tan t$，则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$，当 $x=1$ 时，$t=\frac{\pi}{4}$；当 $x=\sqrt{3}$ 时，$t=\frac{\pi}{3}$. 于是

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec^2 t}{\tan^2 t\sec t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec t}{\tan^2 t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}\sin t}{\sin^2 t}=-\frac{1}{\sin t}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

(4) 设 $t=\sqrt{5-4x}$，则 $x=\frac{5-t^2}{4}$，$\mathrm{d}x=-\frac{t}{2}\mathrm{d}t$，当 $x=-1$ 时，$t=3$；当 $x=1$ 时，$t=1$. 于是

$$\int_{-1}^1\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}}=\int_3^1\frac{5-t^2}{4t}\left(-\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t=-\frac{1}{8}\int_3^1(5-t^2)\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\left(10-\frac{t^3}{3}\Big|_1^3\right)=\frac{1}{8}\left(10-\frac{26}{3}\right)=\frac{1}{6}.$$

(5) 令 $t=\sqrt{2x+1}$,则 $x=\dfrac{t^2-1}{2}$,$\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$,当 $x=0$ 时,$t=1$;当 $x=4$ 时,$t=3$. 从而

$$\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\int_1^3\frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_1^3(t^2+3)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3+3t\right)\Big|_1^3$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{27}{3}+9\right)-\left(\frac{1}{3}+3\right)\right]=\frac{22}{3}.$$

(6) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^4x\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^{\pi}\cos^4x\mathrm{d}\cos x=-\frac{1}{5}\cos^5x\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{5}.$

(7) $\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}(-t^2)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1}).$

(8) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1+\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}(1+\ln x)\mathrm{d}\ln x=\left(\ln x+\frac{\ln^2x}{2}\right)\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{3}{2}.$

(9) 因为 $\sqrt{\sin^2x-\sin^4x}=|\cos x|\sin x$, 所以

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2x-\sin^4x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}|\cos x|\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\mathrm{d}\sin x=\frac{1}{2}\sin^2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\sin^2x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1.$$

(10) $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2x}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{1+\mathrm{e}^{2x}}=\arctan(\mathrm{e}^x)\Big|_0^1=\arctan\mathrm{e}-\frac{\pi}{4}.$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-x^2}, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{1+\cos x}, & -1<x<0,\end{cases}$ 求 $\displaystyle\int_1^4 f(x-2)\mathrm{d}x$.

解 设 $t=x-2$,则 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$,于是

$$\int_1^4 f(x-2)\mathrm{d}x=\int_{-1}^2 f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^0\frac{1}{1+\cos t}\mathrm{d}t+\int_0^2 t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_{-1}^0\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}t+\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}(-t^2)$$

$$=\int_{-1}^0\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\Big|_0^2=\tan\frac{t}{2}\Big|_{-1}^0-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-4}-1)=\tan\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4}+\frac{1}{2}.$$

3. 利用函数的奇偶性计算下列定积分:

(1) $\displaystyle\int_{-5}^5\frac{x^3\sin^2x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_{-2}^2\frac{x+|x|}{2+x^2}\mathrm{d}x$.

解 (1) 因为被积函数为奇函数,并且积分区间为对称区间,所以积分的值为 0.

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{1}{2}}(\arcsin x)^2\mathrm{d}\arcsin x=2\cdot\frac{(\arcsin x)^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)^3$

$$=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)^3=\frac{\pi^3}{324}.$$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int_{-1}^1\frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$$=4\int_0^1\frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2}\mathrm{d}x=4\int_0^1(1-\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x$$

$$=4\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=4-\pi.$$

(4) $\int_{-2}^{2}\frac{x+|x|}{2+x^2}dx=\int_{-2}^{2}\frac{x}{2+x^2}dx+\int_{-2}^{2}\frac{|x|}{2+x^2}dx=0+2\int_0^2\frac{x}{2+x^2}dx=\int_0^2\frac{d(2+x^2)}{2+x^2}$

$$=\ln(2+x^2)\Big|_0^2=\ln6-\ln2=\ln3.$$

4. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx$ (2) $\int_1^{e}x\ln x\,dx$； (3) $\int_0^{1}x\arctan x\,dx$； (4) $\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\,dx$；

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+\cos2x}$； (6) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln t|\,dt$； (7) $\int_1^{e}\sin(\ln x)dx$； (8) $\int_0^{1}\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$.

解 (1) 由分部积分公式得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2d(-\cos x)=x^2(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,d(x^2)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx.$$

再用一次分部积分公式得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,d(\sin x)=x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1.$$

从而 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx=\pi-2.$

(2) $\int_1^{e}x\ln x\,dx=\int_1^{e}\ln x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^{e}-\frac{1}{2}\int_1^{e}x^2\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^{e}x\,dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^{e}$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}.$$

(3) 令 $u=\arcsin x, dv=dx$，则 $du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, v=x$，于是

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\,dx=(x\arcsin x)\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)$$

$$=\frac{\pi}{12}+\left(\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1.$$

(4) $\int_0^{1}x\arctan x\,dx=\int_0^{1}\arctan x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\arctan x\Big|_0^{1}-\frac{1}{2}\int_0^{1}\frac{x^2}{1+x^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^{1}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(1-\arctan x)\Big|_0^{1}$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+\cos2x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{2\cos^2x}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\,d\tan x=\frac{1}{2}\left(x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx\right)$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sqrt{2}}-\ln1=\frac{\pi}{8}-\frac{\ln2}{4}.$$

(6) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln t|\,dt=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln t\,dt+\int_1^{e}\ln t\,dt=-(t\ln t-t)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+(t\ln t-t)\Big|_1^{e}=2-2e^{-1}.$

(7) $\int_1^{e}\sin(\ln x)dx=x\sin(\ln x)\Big|_1^{e}-\int_1^{e}x\cos(\ln x)\frac{dx}{x}=x\sin(\ln x)\Big|_1^{e}-\int_1^{e}\cos(\ln x)dx$

$$=e\sin1-x\cos(\ln x)\Big|_1^{e}-\int_1^{e}\sin(\ln x)dx=e\sin1-e\cos1+1-\int_1^{e}\sin(\ln x)dx,$$

故 $\int_1^{e}\sin(\ln x)dx=\frac{1}{2}(e\sin1-e\cos1+1)$.

(8) $\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx = \int_0^1 e^x \frac{1+x-1}{(1+x)^2}dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^2}dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}dx + \int_0^1 e^x d\left(\frac{1}{1+x}\right)$

$$= \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}dx + \frac{e^x}{1+x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}dx = \frac{e}{2} - 1.$$

5. 已知 $f(x)$ 连续且满足方程 $f(x) = xe^{-x} + 2\int_0^1 f(t)dt$，求 $f(x)$.

解　对方程 $f(x) = xe^{-x} + 2\int_0^1 f(t)dt$ 两边积分，得 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xe^{-x}dx + 2\int_0^1 f(t)dt$，即 $\int_0^1 f(x)dx = 1 - 2e^{-1} + 2\int_0^1 f(t)dt$，所以 $\int_0^1 f(x)dx = 2e^{-1} - 1$，于是 $f(x) = xe^{-x} + 4e^{-1} - 2$.

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明 $\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]dx$.

证明　设 $x = a+(b-a)t$，则 $dx = (b-a)dt$. 当 $x = a$ 时，$t = 0$；当 $x = b$ 时，$t = 1$. 于是 $\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f[a+(b-a)t](b-a)dt = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)t]dt = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]dx$.

7. 证明：$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$.

证明　设 $x = 1-t$，则 $dx = -dt$，当 $x = 0$ 时，$t = 1$；当 $x = 1$ 时，$t = 0$. 于是

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_1^0 (1-t)^m t^n(-dt) = \int_0^1 (1-t)^m t^n dt = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx.$$

8. 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x}dx$. 并求出积分值.

证明　令 $x = \frac{\pi}{2} - t$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x}dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^3 t}{\sin t + \cos t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t}{\sin t + \cos t}dt$.

设 $a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x}dx$，则 $2a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x + \cos^2 x\right)dx = \frac{\pi - 1}{2}$，故 $a = \frac{\pi - 1}{4}$.

9. 若 $f(t)$ 连续且为奇函数，证明 $\int_0^x f(t)dt$ 是偶函数；若 $f(t)$ 连续且为偶函数，证明 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数.

证明　设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$，则 $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt \xlongequal{t=-u} \int_0^x f(-u)(-du) = -\int_0^x f(-u)du$.

又因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-u) = -f(u)$，因此 $F(-x) = \int_0^x f(u)du = \int_0^x f(t)dt = F(x)$，即 $F(x)$ 是偶函数.

若 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-u) = f(u)$，因此 $F(-x) = -\int_0^x f(u)du = -\int_0^x f(t)dt = -F(x)$，即 $F(x)$ 是奇函数.

10. 若 $f''(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，$f(0) = 2$，$f(\pi) = 1$，证明：$\int_0^\pi [f(x) + f''(x)]\sin x dx = 3$.

证明　因为

$$\int_0^\pi f''(x)\sin x dx = \int_0^\pi \sin x d f'(x) = \sin x f'(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\cos x dx = -\int_0^\pi f'(x)\cos x dx$$

$$= -\int_0^\pi \cos x d f(x) = -f(x)\cos x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi f(x)\sin x dx = f(\pi) + f(0) - \int_0^\pi f(x)\sin x dx$$

$$= 1 + 2 - \int_0^\pi f(x)\sin x dx = 3 - \int_0^\pi f(x)\sin x dx,$$

所以 $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)]\sin x dx = 3$.

提高题

1. $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})\mathrm{d}x=$ ________.

解 $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}\mathrm{d}x=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot\pi^2=\frac{\pi^3}{2}$. 故应填$\frac{\pi^3}{2}$.

2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)\cos^2 x}\mathrm{d}x=$ ________.

解 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)\cos^2 x}\overset{x=-t}{\underset{\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t}{=\!=\!=}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}t}{(1+\mathrm{e}^{-t})\cos^2 t}$, 故

$$2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)\cos^2 x}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)\cos^2 x}+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)\cos^2 x}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=2\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=2,$$

即 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)\cos^2 x}\mathrm{d}x=1$. 故应填 1.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2016}x}{\sin^{2016}x+\cos^{2016}x}\mathrm{d}x=$ ________.

解 设 $x=\frac{\pi}{2}-t$, 则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, 于是

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2016}x}{\sin^{2016}x+\cos^{2016}x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^{2016}t}{\cos^{2016}t+\sin^{2016}t}(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2016}x}{\cos^{2016}x+\sin^{2016}x}\mathrm{d}x,$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2016}x}{\sin^{2016}x+\cos^{2016}x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2016}x}{\cos^{2016}x+\sin^{2016}x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

于是 $I=\frac{\pi}{4}$, 故应填$\frac{\pi}{4}$.

4. 设连续非负函数满足 $f(x)f(-x)=1(-\infty<x<+\infty)$, 则$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+f(x)}\mathrm{d}x=$ ________.

解 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+f(x)}\mathrm{d}x\overset{x=-t}{\underset{\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t}{=\!=\!=}}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(-t)}{1+f(-t)}\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(-t)}{1+\frac{1}{f(t)}}\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(t)\cos t}{f(t)+1}\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)\cos x}{1+f(x)}\mathrm{d}x,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+f(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+f(x)}\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)\cos x}{1+f(x)}\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{[1+f(x)]\cos x}{1+f(x)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

故应填 1.

5. 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0)=f'(0)=0$, 记

$$F(x)=\begin{cases}\int_0^x\left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u, & x\leqslant 0,\\ \int_{-x}^{0}\ln[1+f(x+t)]\mathrm{d}t, & x>0,\end{cases}$$

求 $F'(x)$ 及 $F''(0)$.

解 当 $x<0$ 时, $F'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$; 当 $x>0$ 时, 令 $u=x+t$, 则 $F(x)=\int_0^x\ln[1+f(u)]\mathrm{d}u$, 故得

$$F'(x)=\ln[1+f(x)].$$

由于 $F'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^u f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$,

$$F'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\ln(1+f(u))\mathrm{d}u}{x}=\lim_{x\to0^+}\ln(1+f(x))=\ln(1+f(0))=0,$$

所以 $F'(0)=0$,从而

$$F'(x)=\begin{cases}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \ln[1+f(x)], & x>0.\end{cases}$$

由于

$$F''_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{F'(x)-F'(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to0^-}f(x)=0,$$

$$F''_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{F'(x)-F'(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln[1+f(x)]}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0,$$

所以 $F''(0)=0$.

6. 设函数 $f(x)=\int_1^x\dfrac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t(x>0)$,则 $f(x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)=$ ________.

解 $$f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t\xlongequal[\mathrm{d}t=-\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u]{t=\frac{1}{u}}\int_1^x\frac{\ln\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u^2}}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u=\int_1^x\frac{\ln u}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t,$$

$$f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t-\int_1^x\frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t=0.$$

故应填 0.

7. 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}$.

解 $$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}\xlongequal{x-t=u}\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^x\cdot\int_0^x\sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u}{x^{\frac{3}{2}}}\xlongequal{\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^x=1}\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}\cdot1=\frac{2}{3}.$$

8. 如图 5-10 所示,曲线 C 的方程为 $y=f(x)$,点(3,2)是它的一个拐点,直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点(0,0)与(3,2)处的切线,其交点为(2,4). 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数,计算定积分$\int_0^3(x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x$.

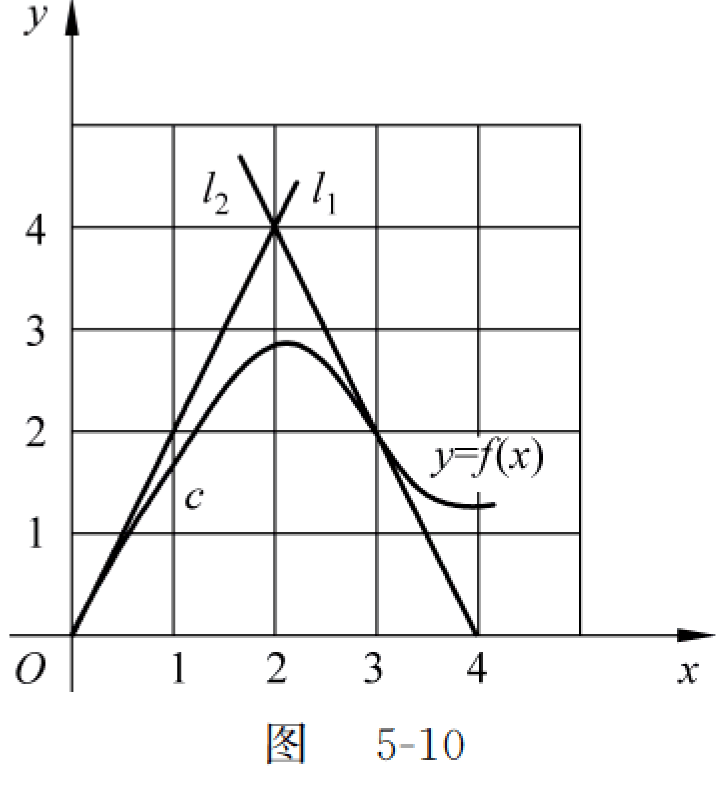


图 5-10

解 由题设图形知 $f(0)=0,f'(0)=2;f(3)=2,f'(3)=-2,f''(3)=0$. 故

$$\begin{aligned}\int_0^3(x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x&=\int_0^3(x^2+x)\mathrm{d}f''(x)\\&=(x^2+x)f''(x)\Big|_0^3-\int_0^3 f''(x)(2x+1)\mathrm{d}x\\&=-\int_0^3(2x+1)\mathrm{d}f'(x)\\&=-(2x+1)f'(x)\Big|_0^3+\int_0^3 f'(x)\cdot2\mathrm{d}x\\&=16+2[f(3)-f(0)]=20.\end{aligned}$$

9. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{21}{2}\pi} \sin^6 x\mathrm{d}x =$ ________.

解 因为 $f(x)=\sin^6 x$ 的周期为 π，所以

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{21}{2}\pi} \sin^6 x\mathrm{d}x = 10\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sin^6 x\mathrm{d}x = 10\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\mathrm{d}x = 10\times 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\mathrm{d}x = 20\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{25}{8}\pi.$$

故应填：$\frac{25}{8}\pi$.

10. 设 $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，$n$ 为正整数，证明：(1) $|a_{n+1}|<|a_n|$；(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

证明 令 $x=n\pi+t$，得 $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = (-1)^n\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{n\pi+t}\mathrm{d}t$.

(1) $|a_{n+1}| = \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{(n+1)\pi+t}\mathrm{d}t < \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{n\pi+t}\mathrm{d}t = |a_n|$；

(2) $|a_n| = \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{n\pi+t}\mathrm{d}t < \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{n\pi}\mathrm{d}t = \frac{2}{n\pi}$，由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

11. 设 $f(x)$ 单调增加且有连续导数，$f(0)=0$，$f(a)=b$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 互为反函数，证明：

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b g(x)\mathrm{d}x = ab.$$

证明 设 $F(t) = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{f(t)} g(x)\mathrm{d}x - tf(t)$，则 $F(0)=0$，

$$F'(t) = f(t)+g(f(t))f'(t) - f(t) - tf'(t) = f(t)+tf'(t)-f(t)-tf'(t) = 0,$$

所以 $F(t)\equiv C=F(0)=0$.

取 $t=a$，得

$$F(a) = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{f(a)} g(x)\mathrm{d}x - af(a) = 0,\quad 即\quad \int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b g(x)\mathrm{d}x = ab.$$

12. 已知 $f(x)$在$\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$上连续，在$\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$内是函数$\frac{\cos x}{2x-3\pi}$的一个原函数，$f(0)=0$.

(1) 求 $f(x)$在区间$\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$上的平均值；

(2) 证明 $f(x)$在区间$\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$内存在唯一零点.

解 (1) $f(x) = \int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}t$,

$$\overline{f(x)} = \frac{\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\mathrm{d}x}{\frac{3}{2}\pi} = \frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\underbrace{\left(\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}t\right)}_{u}\underbrace{\mathrm{d}x}_{v} = \frac{2}{3\pi}\left[\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}t\cdot x\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi} - \int_0^{\frac{3}{2}\pi} x\cdot\frac{\cos x}{2x-3\pi}\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{2}{3\pi}\left[\frac{3}{2}\pi\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos x}{2x-3\pi}\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{3}{2}\pi} x\cdot\frac{\cos x}{2x-3\pi}\mathrm{d}x\right] = \frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos x}{2x-3\pi}\cdot\left[\frac{3}{2}\pi - x\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3\pi}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos x}{2x-3\pi}\cdot(2x-3\pi)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3\pi}\cdot\sin x\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{3\pi}.$$

(2) $f'(x)<0$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f'(x)>0$，$x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，从而 $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内单调递减，在$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$内单调递增，注意 $f(0)=0$，则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}t > \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{-2\pi}\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos t}{-2\pi}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} > 0.$$

$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内单调递减，则 $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内无零点，$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$内单调递增，则 $f(x)$在

$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$内有唯一零点，从而 $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内有唯一零点.

习题 5.5

1. 判断反常积分的敛散性：

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}dx$； (2) $\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$； (3) $\int_0^{+\infty}\sin x dx$； (4) $\int_{-\infty}^0\frac{e^x}{1+e^x}dx$；

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx$； (6) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx$； (7) $\int_{-1}^1\frac{1}{x}dx$； (8) $\int_0^1\frac{\ln x}{x}dx$；

(9) $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$； (10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2 x}dx$.

解 (1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}dx=-\frac{1}{3x^3}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{3}$，故反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}dx$ 收敛.

(2) $\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}(1-e^{-b})=1$，或$\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=0-(-1)=1$，故收敛.

(3) 对任意 $b>0$，$\int_0^b\sin x dx=-\cos x\Big|_0^b=-\cos b+(\cos 0)=1-\cos b$.

因为$\lim\limits_{b\to+\infty}(1-\cos b)$不存在，故由定义知反常积分$\int_0^{+\infty}\sin x dx$ 发散.

(4) $\int_{-\infty}^0\frac{e^x}{1+e^x}dx=\ln(1+e^x)\Big|_{-\infty}^0=\ln 2$，故反常积分$\int_{-\infty}^0\frac{e^x}{1+e^x}dx$ 收敛.

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2+1}d(x+1)=\arctan(x+1)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\pi$，故收敛.

(6) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx=\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}\ln 2$，故收敛.

(7) $\int_{-1}^1\frac{1}{x}dx=\int_{-1}^0\frac{1}{x}dx+\int_0^1\frac{1}{x}dx$，而$\int_0^1\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_0^1=\infty$，所以$\int_0^1\frac{1}{x}dx$ 发散，即$\int_{-1}^1\frac{1}{x}dx$ 发散.

(8) 因为$\int_0^1\frac{\ln x}{x}dx=\int_0^1\ln x d\ln x=\frac{\ln^2 x}{2}\Big|_0^1=\infty$，从而$\int_0^1\frac{\ln x}{x}dx$ 发散.

(9) 因为$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)=-\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1=1$，从而$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$收敛.

(10) 因为$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2 x}dx=2\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\infty$，从而$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2 x}dx$ 发散.

2. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_{-\infty}^a te^t dt$，求常数 a.

解 $\int_{-\infty}^a te^t dt=(te^t-e^t)\Big|_{-\infty}^a=e^a(a-1)$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{ax}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{a\cdot x}=e^a$，由 $e^a(a-1)=e^a$，解得 $a=2$.

3. 当 λ 为何值时，反常积分$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^\lambda}$ 收敛？当 λ 为何值时，该反常积分发散？

解 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^\lambda}=\int_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{(\ln x)^\lambda}=\frac{1}{1-\lambda}(\ln x)^{1-\lambda}\Big|_2^{+\infty}$.

当 $1-\lambda>0$，即 $\lambda<1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^\lambda}=+\infty$；

当 $1-\lambda=0$，即 $\lambda=1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\ln|\ln x|\Big|_2^{+\infty}=+\infty$；

当 $1-\lambda<0$，即 $\lambda>1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^\lambda}=\frac{(\ln 2)^{1-\lambda}}{\lambda-1}$.

故当 $\lambda \leqslant 1$ 时,反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^\lambda}$ 发散,当 $\lambda > 1$ 时,反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^\lambda}$ 收敛.

4. 计算 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$.

解 $$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \arctan x\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\arctan x\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

提高题

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$ ________.

解 原式 $= \int_0^{+\infty} \ln(1+x)\mathrm{d}\left(-\frac{1}{1+x}\right) = \left(-\frac{1}{1+x}\right)\ln(1+x)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

$$= -0 - \frac{1}{1+x}\Big|_0^{+\infty} = 0 - (0-1) = 1.$$

故应填 1.

2. $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x =$ ________.

解 原式 $= \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{(x+1)^2+2^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_{-\infty}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{8}\pi$. 故应填 $\frac{3}{8}\pi$.

习题 5.6

1. 求下列曲线所围图形的面积:

(1) $y = 8 - 2x^2$ 与 $y = 0$;

(2) $y = \sqrt{x}$ 与 $y = x$;

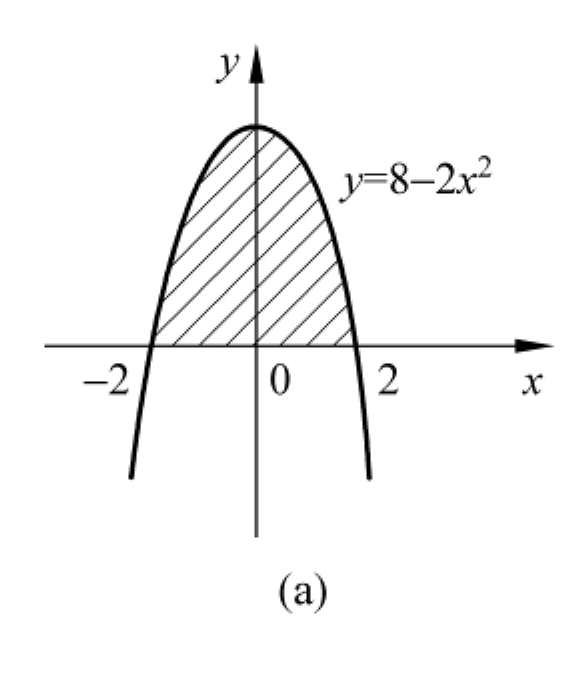
(3) $y = x^2$ 与 $y = 2x + 3$;

(4) $y = \frac{1}{x}$, $y = x$ 与 $x = 2$;

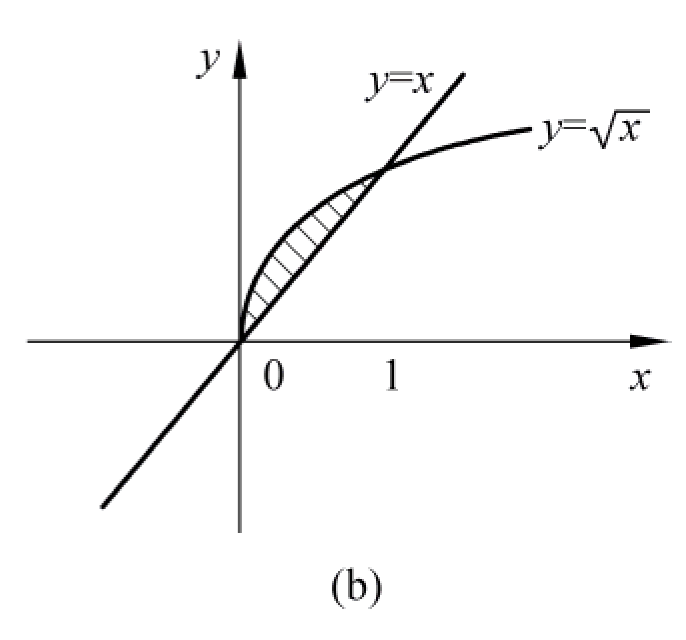
(5) $y = \ln x$, y 轴与 $y = \ln a$, $y = \ln b\,(b > a > 0)$;

(6) $y = \mathrm{e}^x$, $y = \mathrm{e}^{-x}$ 与 $x = 1$.

解 (1) 画草图(如图 5-11(a) 所示). $A = 2\int_0^2 (8-2x^2)\mathrm{d}x = 2\left(16 - \frac{2}{3}x^3\Big|_0^2\right) = 32 - \frac{4}{3}\times 8 = \frac{64}{3}$.



(a)



(b)

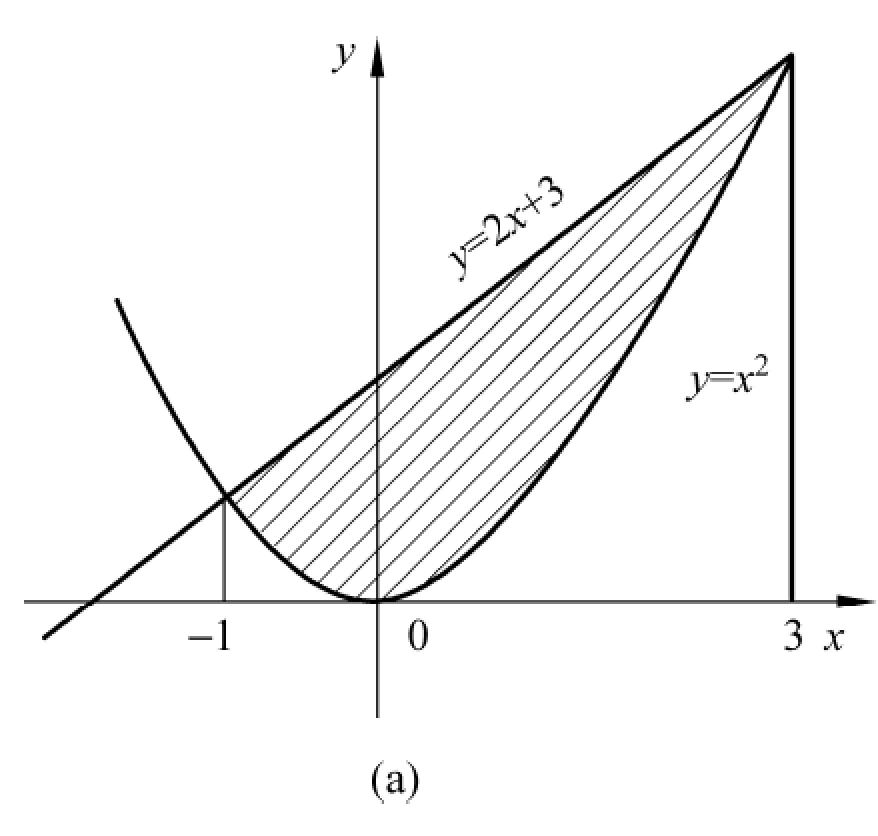
图 5-11

(2) 画草图(如图 5-11(b)所示). $A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

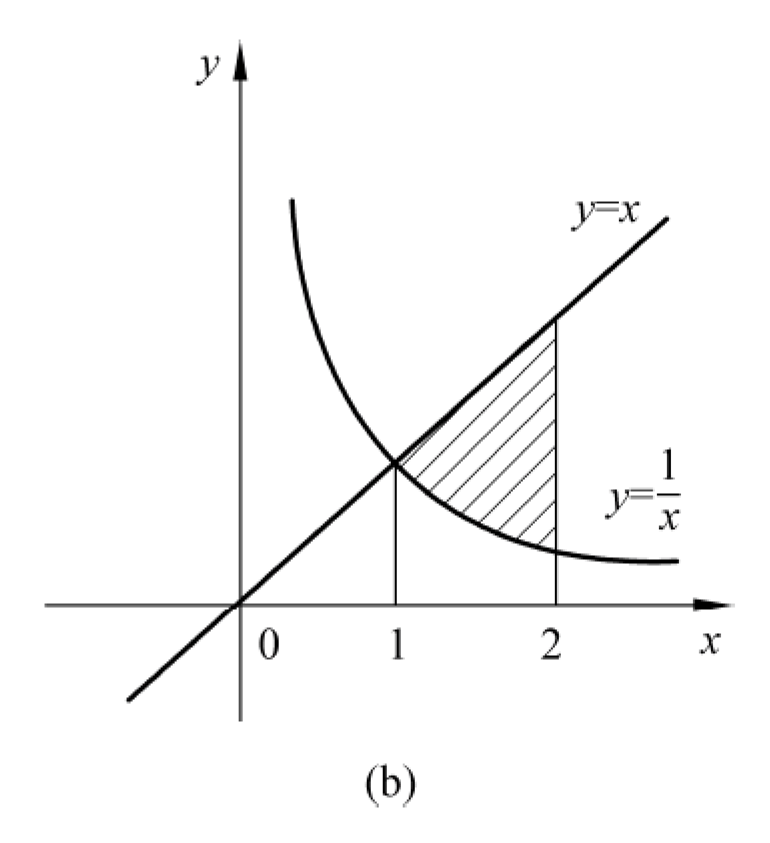
(3) 画草图(如图 5-12(a)所示).

$$A = \int_{-1}^{3} (2x+3-x^2)\mathrm{d}x = x^2\Big|_{-1}^{3} + 3\times 4 - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{3} = 8 + 12 - \frac{1}{3}\times 28 = \frac{32}{3}.$$

(4) 画草图(如图 5-12(b)所示). $A = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 - \ln x\Big|_1^2 = \frac{3}{2} - \ln 2$.



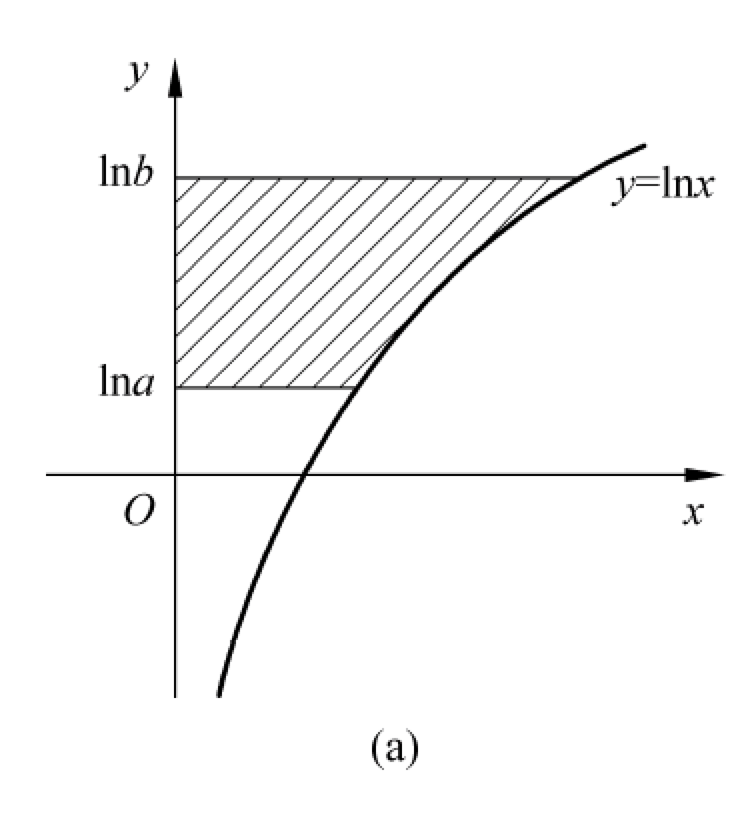
(a)



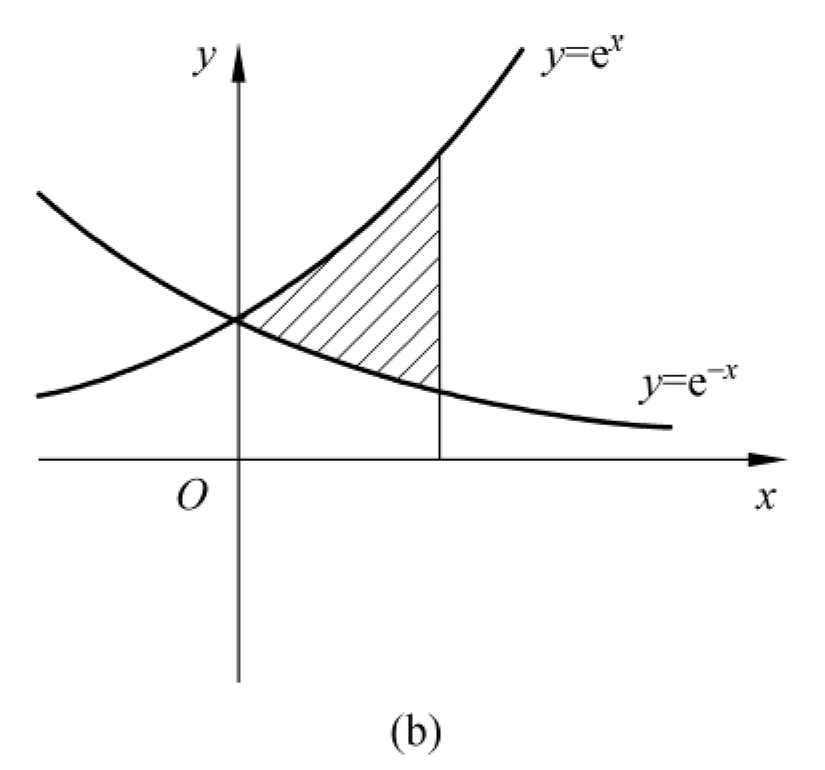
(b)

图 5-12

(5) 画草图(如图 5-13(a)所示). $A=\int_{\ln a}^{\ln b}e^{y}\mathrm{d}y=e^{y}\Big|_{\ln a}^{\ln b}=e^{\ln b}-e^{\ln a}=b-a$.



(a)



(b)

图 5-13

(6) 画草图(如图 5-13(b)所示). $A=\int_{0}^{1}(e^{x}-e^{-x})\mathrm{d}x=e^{x}\Big|_{0}^{1}+e^{-x}\Big|_{0}^{1}=e+e^{-1}-2$.

2. 曲线 $y=x^2$ 在点(1,1)处的切线与 $x=y^2$ 所围成图形的面积.

解 画草图(如图 5-14 所示).

因 $y'=2x$,故 $k=2$,切线方程为 $y-1=2(x-1)$,即 $y=2x-1$.

由 $\begin{cases}y=2x-1\\x=y^2\end{cases}$,解得交点为 $\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$,(1,1).故

$$A=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{y+1}{2}-y^2\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{y^2}{4}+\frac{y}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{1}=\frac{9}{16}.$$

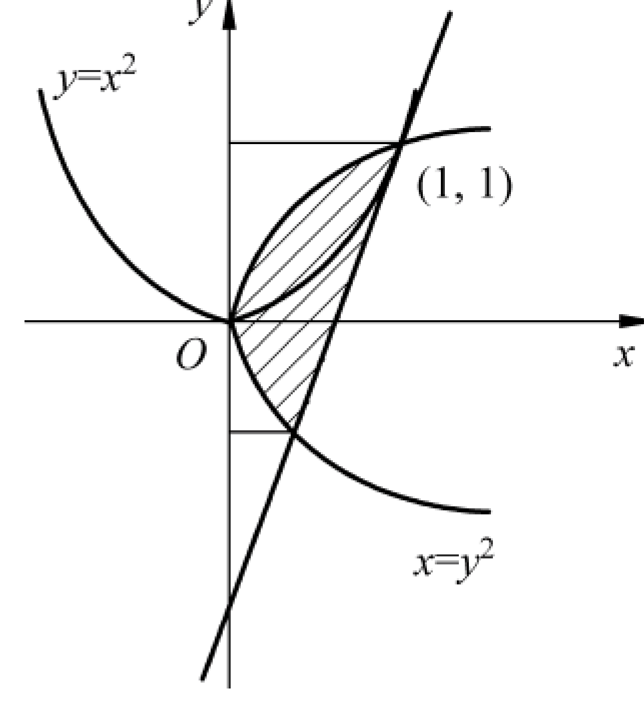


图 5-14


3. 求下列极坐标表示的曲线所围图形的面积:

(1) $r=2a\cos\theta$; (2) $r=2a(2+\cos\theta)$;

(3) $r=3\cos\theta$ 与 $r=1+\cos\theta$ 所围图形的公共部分.

解 (1) 画草图(如图 5-15(a)所示).

$$A=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(2a\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=4a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=4a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}\mathrm{d}\theta=2a^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin2\theta}{2}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right)=\pi a^2.$$

(2) 画草图(如图 5-15(b)所示).

$$A=2\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}[2a(2+\cos\theta)]^2\mathrm{d}\theta=4a^2\int_{0}^{\pi}(4+4\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta=4a^2\int_{0}^{\pi}\left(4+4\cos\theta+\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= 4a^2\left(\frac{9\pi}{2}+4\sin\theta\Big|_0^{\pi}+\frac{\sin 2\theta}{4}\Big|_0^{\pi}\right)=18\pi a^2.$$

(a) (b) (c)

图 5-15

(3) 画草图(如图 5-15(c)所示).

$$A=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(3\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta\right)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta+9\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta+9\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi}{3}+2\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}+\frac{\sin 2\theta}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+\frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{5\pi}{4}.$$

4. 求下列已知曲线所围成的图形,按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积:

(1) $y=x^2, x=y^2$,分别绕 x 轴、y 轴;　　(2) $y=x^3, x=2, y=0$,分别绕 x 轴、y 轴;

(3) $y=x, x=2, y=\dfrac{1}{x}$,分别绕 x 轴、y 轴;　　(4) $y=0, x=\dfrac{\pi}{2}, y=\sin x$,分别绕 x 轴、y 轴.

解 (1) 画草图(如图 5-16(a)所示).

$$V_x=\int_0^1\pi(\sqrt{x})^2\mathrm{d}x-\int_0^1\pi(x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{10},\quad V_y=\int_0^1\pi(\sqrt{y})^2\mathrm{d}y-\int_0^1\pi(y^2)^2\mathrm{d}y=\frac{3\pi}{10}.$$

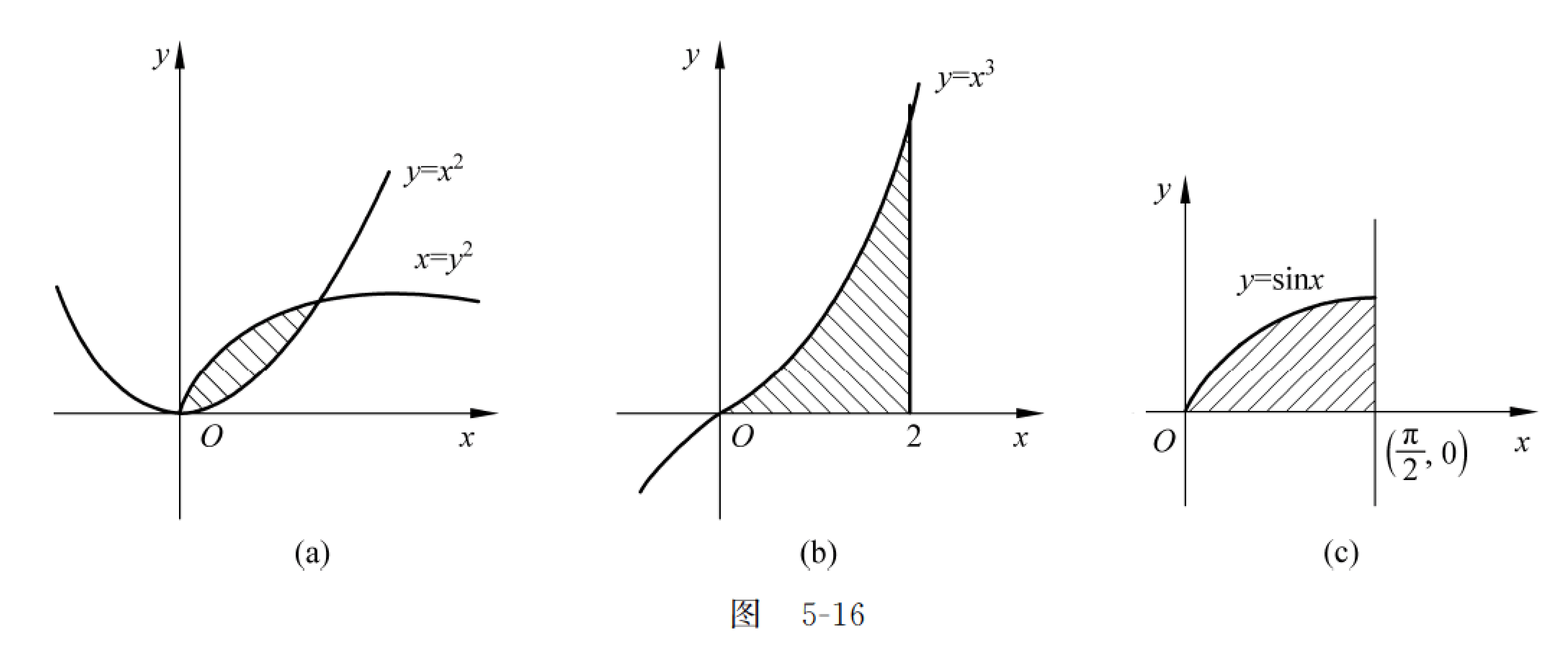


图 5-16

(2) 画草图(如图 5-16(b)所示).

$$V_x=\int_0^2\pi(x^3)^2\mathrm{d}x=\frac{128\pi}{7},\quad V_y=\pi 2^2\times 8-\int_0^8\pi(\sqrt[3]{y})^2\mathrm{d}y=32\pi-\frac{3}{5}\times 32\pi=\frac{64}{5}\pi.$$

(3) 草图如前面图 5-12(b)所示.

$$V_x=\int_1^2\pi(x)^2\mathrm{d}x-\int_1^2\pi\left(\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{11\pi}{6},\quad V_y=\pi 2^2\times\frac{3}{2}-\int_{\frac{1}{2}}^1\pi\left(\frac{1}{y}\right)^2\mathrm{d}y-\int_1^2\pi y^2\mathrm{d}y=\frac{8}{3}\pi.$$

（4）画草图（如图 5-16(c)所示）. $V_x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi(\sin x)^2\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}$，

$$V_y=\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\times 1-\int_0^1\pi(\arcsin y)^2\mathrm{d}y=\frac{\pi^3}{4}-\pi y(\arcsin y)^2\Big|_0^1+2\int_0^1\pi y\arcsin y\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y=2\pi.$$

若对 x 积分，则有 $V_y=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\mathrm{d}x=2\pi$.

5. 计算由摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$的一拱，直线 $y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

解 画草图（如图 5-17 所示）. 按旋转体的体积公式，所述图形绕 x 轴旋转成旋转体的体积为

$$V_x=\int_0^{2\pi a}\pi y^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2a(1-\cos t)\mathrm{d}t=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\mathrm{d}t=5\pi^2a^3.$$

所述图形绕 y 轴旋转成旋转体的体积可看成是平面图形 $OABC$ 与 OBC（图 5-17）分别绕 y 轴旋转而成旋转体的体积之差. 因此所求的体积为

$$V_y=\int_0^{2a}\pi x_2^2(y)\mathrm{d}y-\int_0^{2a}\pi x_1^2(y)\mathrm{d}y=\pi\int_{2\pi}^{\pi}a^2(t-\sin t)^2a\sin t\mathrm{d}t-\pi\int_0^{\pi}a^2(t-\sin t)^2a\sin t\mathrm{d}t$$

$$=-\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)^2\sin t\mathrm{d}t=6\pi^3a^3.$$

6. 求以半径为 R 的圆为底、平行且等于底圆直径的线段为顶、高为 h 的正劈锥体的体积.

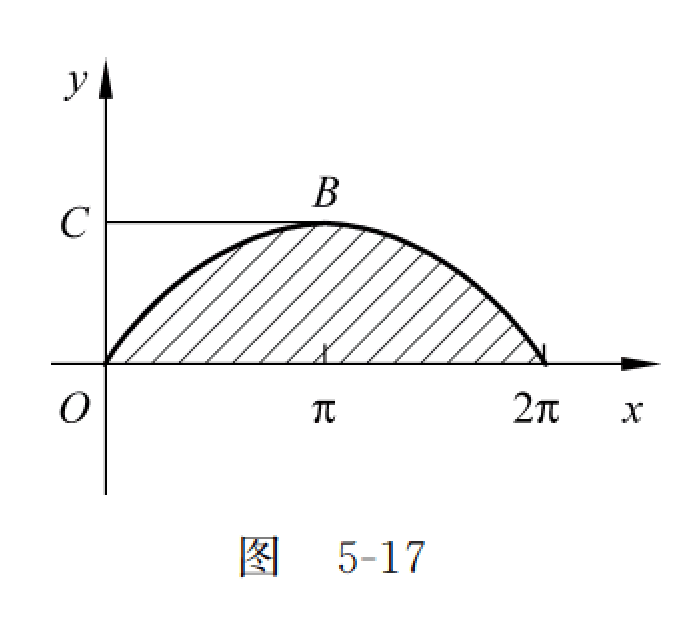


图 5-17

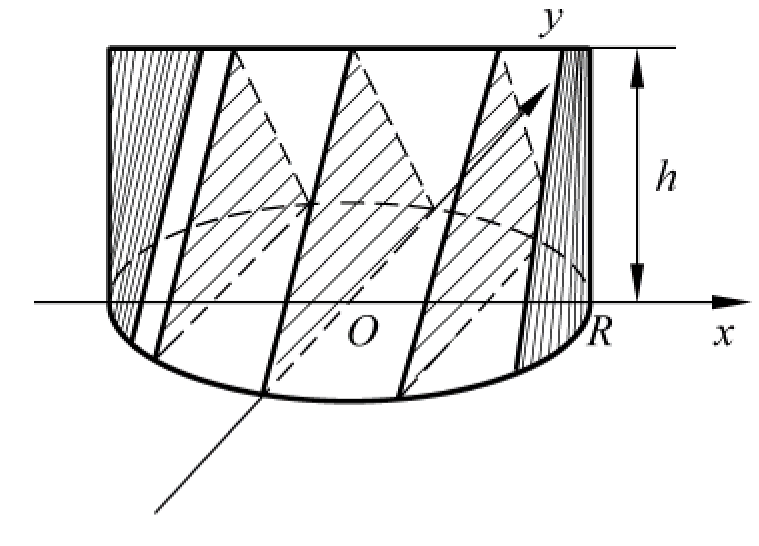


图 5-18

解 如图 5-18 所示，取底圆所在的平面为 xOy 平面，圆心 O 为原点，并使 x 轴与正劈锥的顶平行，底圆的方程为 $x^2+y^2=R^2$.

过 x 轴上的点 $x(-R\leqslant x\leqslant R)$作垂直于 x 轴的平面，截正劈锥体得等腰三角形，此截面的面积为 $A(x)=\frac{1}{2}h\cdot 2y=h\sqrt{R^2-x^2}$，于是所求正劈锥体的体积为

$$V=\int_{-R}^{R}A(x)\mathrm{d}x=h\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x=2R^2h\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi R^2h}{2},$$

即正劈锥体的体积等于同底同高的圆柱体体积的一半.

7. 证明：由平面图形 $0\leqslant a\leqslant x\leqslant b$，$0\leqslant y\leqslant f(x)$绕 y 轴旋转所得旋转体的体积为 $V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$.

证明 体积微元 $\mathrm{d}V=2\pi xf(x)\mathrm{d}x$，故 $V=\int_a^b 2\pi xf(x)\mathrm{d}x=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$.

提高题

1. 设位于曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}$（$\mathrm{e}\leqslant x<+\infty$）下方，$x$ 轴上方的无界区域为 G，则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为________.

解 $V=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\pi y^2(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\pi\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\mathrm{d}x=\pi\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\arctan\ln x-\frac{\pi}{4}\right)=\pi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}$.

故应填$\frac{\pi^2}{4}$.

2. 求由曲线 $y=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x}{1+x^2+e^{nx}}$, $y=\frac{x}{2}$, $y=0$ 及 $x=1$ 围成的平面图形的面积.

解 $y=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x}{1+x^2+e^{nx}}=\begin{cases}0, & x\geqslant 0,\\ \frac{x}{1+x^2}, & x<0,\end{cases}$ 故所求面积为

$$S=\int_{-1}^{0}\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx+\int_0^1\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\ln 2.$$

3. 设 S_1 是由曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=t^2(0<t<1)$ 及 y 轴所围图形的面积, S_2 是由曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=t^2(0<t<1)$ 及 $x=1$ 所围图形的面积(如图 5-19 所示). 求: t 取何值时, $S(t)=S_1+S_2$ 取到极小值? 极小值是多少?

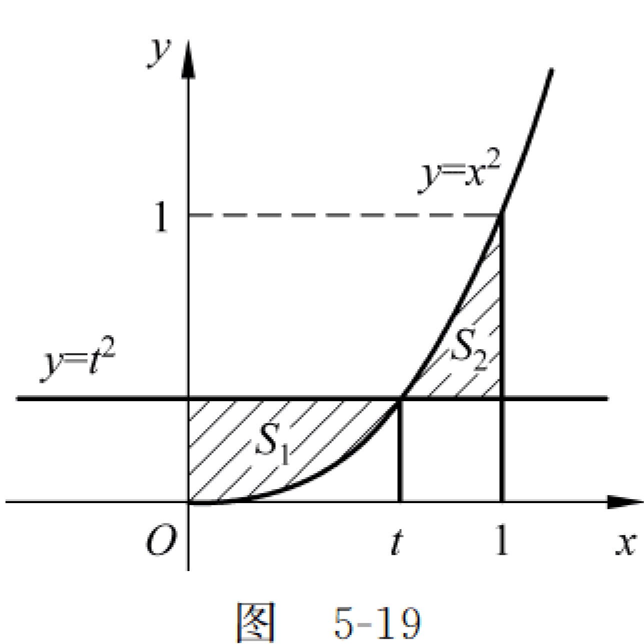


图 5-19

解 解法一 根据题意知

$$S(t)=S_1+S_2=\left(t^3-\int_0^t x^2dx\right)+\left[\int_t^1 x^2dx-t^2(1-t)\right]$$
$$=2t^3-t^2-\int_0^t x^2dx+\int_t^1 x^2dx,$$

或 $S(t)=S_1+S_2=\int_0^t(t^2-x^2)dx+\int_t^1(x^2-t^2)dx=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}$, 则

$$S'(t)=6t^2-2t-t^2-t^2=4t^2-2t=2t(2t-1), \text{或 } S'(t)=4t^2-2t=2t(2t-1).$$

令 $S'(t)=0$, 得在 $(0,1)$ 内有驻点 $t=\frac{1}{2}$.

显然, 当 $0<t<\frac{1}{2}$ 时, $S'(t)<0$; 当 $\frac{1}{2}<t<1$ 时, $S'(t)>0$ 或 $S''\left(\frac{1}{2}\right)=8\times\frac{1}{2}-2=2>0$. 所以 $S(t)$ 在 $t=\frac{1}{2}$ 处取得极小值. 进而极小值是

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-\int_0^{\frac{1}{2}}x^2dx+\int_{\frac{1}{2}}^{0}x^2dx=-\frac{1}{3}x^3\bigg|_0^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}x^3\bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{4},$$

或 $S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}\times\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$.

解法二 根据题意知

$$S(t)=S_1+S_2=\int_0^{t^2}\sqrt{y}dy+\left[(1-t^2)-\int_{t^2}^1\sqrt{y}dy\right]=1-t^2+\int_0^{t^2}\sqrt{y}dy-\int_{t^2}^1\sqrt{y}dy,$$

或 $S(t)=S_1+S_2=\int_0^{t^2}\sqrt{y}dy+\int_{t^2}^1[1-\sqrt{y}]dy=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}$, 则

$$S'(t)=-2t+2t^2+2t^2=4t^2-2t=2t(2t-1) \text{ 或 } S'(t)=4t^2-2t=2t(2t-1).$$

其余步骤同方法一.

4. 设直线 $y=ax$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成的图形的面积为 S_1, 它们与直线 $x=1$ 所围成的图形的面积为 S_2, 并且 $a<1$. 试确定 a 的值, 使 $S=S_1+S_2$ 达到最小, 并求出最小值.

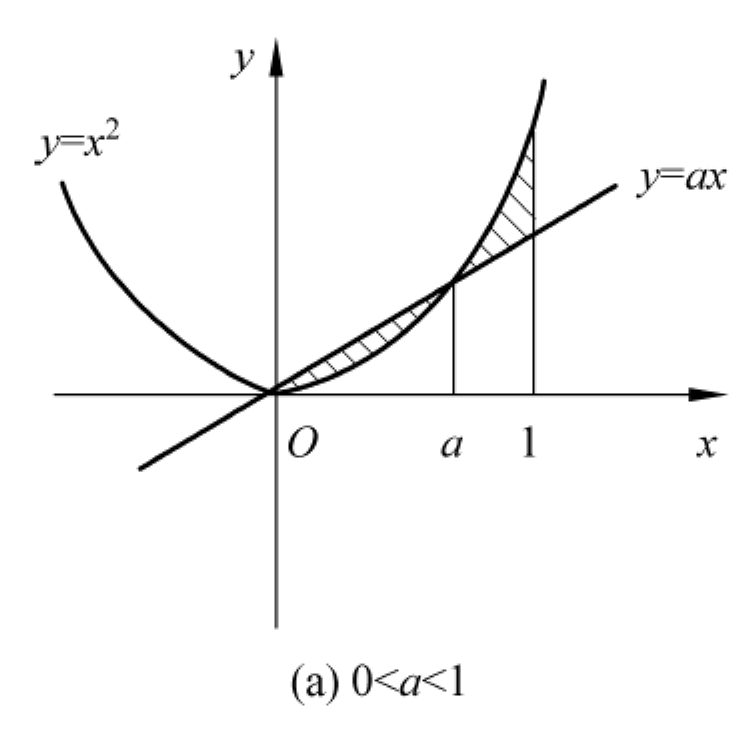
解 画草图(如图 5-20(a)、(b)所示).

当 $0<a<1$ 时

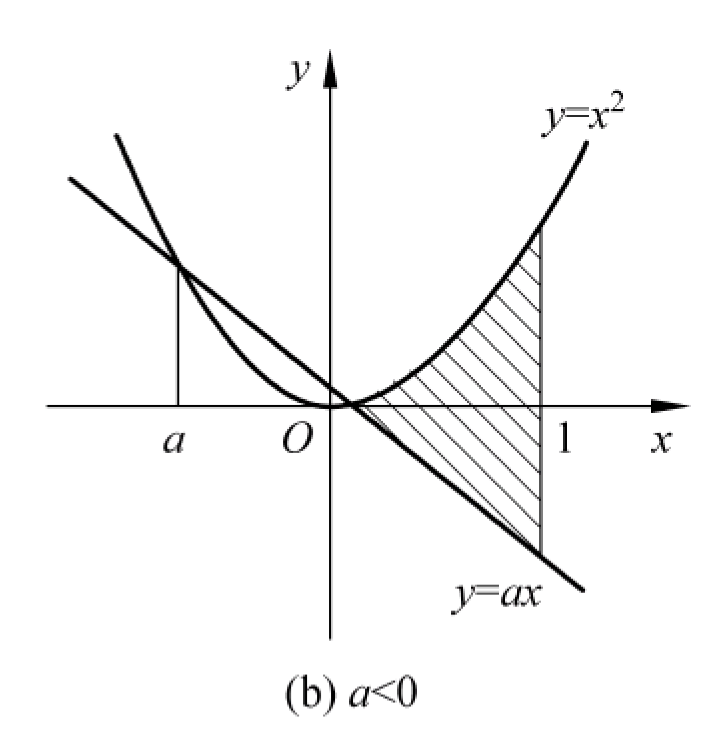
$$S=S_1+S_2=\int_0^a(ax-x^2)dx+\int_a^1(x^2-ax)dx=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3},\quad S'=a^2-\frac{1}{2}, S''=2a.$$

令 $S'=a^2-\frac{1}{2}=0$ 得 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 而 $S''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}>0$, 所以 $S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$ 是唯一的极小值也即最小值.

当 $a\leqslant 0$ 时



(a) 0<a<1



(b) a<0

图 5-20

$$S=S_1+S_2=\int_a^0(ax-x^2)\,\mathrm{d}x+\int_0^1(x^2-ax)\,\mathrm{d}x=-\frac{a^3}{6}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3},$$

$$S'=-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}<0,$$

所以 S 单调减少，当 $a=0$ 时，S 取最小值，此时 $S(0)=\frac{1}{3}$.

综上所述，当 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，S 取最小值 $S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$.

5. 设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a$，$x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域；D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0$，$x=a$ 所围成的平面区域，其中 $0<a<2$.

(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积 V_1 及 D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积 V_2；

(2) 问当 a 为何值时，V_1+V_2 取得最大值？试求此最大值.

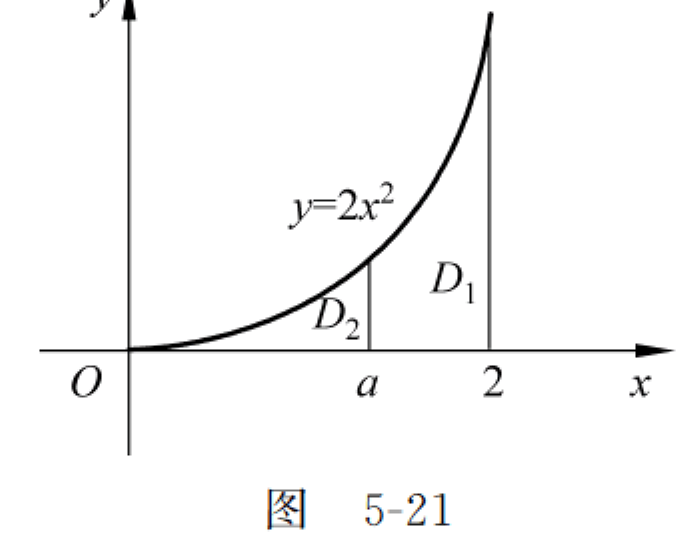


图 5-21

解 如图 5-21 所示.

(1) 由题设及旋转体体积公式，有

$$V_1=\pi\int_a^2(2x^2)^2\,\mathrm{d}x=\frac{4\pi}{5}(32-a^5),$$

$$V_2=\pi a^2\cdot 2a^2-\pi\int_0^{2a^2}\frac{y}{2}\,\mathrm{d}y=2\pi a^4-\pi a^4=\pi a^4.$$

(2) 设 $V=V_1+V_2=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)+\pi a^4$. 令 $V'=4\pi a^3(1-a)=0$，得 $(0,2)$ 内的唯一驻点 $a=1$.

当 $0<a<1$ 时，$V'>0$；当 $1<a<2$ 时，$V'<0$. 故 $a=1$ 是极大值点，亦即最大值点，此时 V_1+V_2 取得最大值 $\frac{129}{5}\pi$.

6. 设平面图形 A 由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 与 $y\geqslant x$ 所确定，求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

解 以 y 为积分变量，它的最大范围为 $0\leqslant y\leqslant 1$，在其上固定一点，过此点作平行于 x 轴的平行线，这条平行线与图形 A 的两条边界线 $x=y$，$x=1-\sqrt{1-y^2}$ 相交，它们与旋转轴之间的距离分别为 $2-y$，$2-(1-\sqrt{1-y^2})$，则所求体积为

$$V=\pi\int_0^1\left\{\left[2-\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)\right]^2-(2-y)^2\right\}\mathrm{d}y=2\pi\int_0^1\left[\sqrt{1-y^2}-(1-y)^2\right]\mathrm{d}y$$

$$=2\pi\left[\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}(1-y)^3\Big|_0^1\right]=\frac{\pi^2}{2}-\frac{2\pi}{3}.$$

习题 5.7

1. 某企业生产 x 吨产品时的边际成本为 $C'(x)=\frac{1}{50}x+30$（元/吨），且固定成本为 900 元，试求产量为

多少时平均成本最低?

解 首先求出成本函数.

$$C(x)=\int_0^x C'(t)\mathrm{d}t+C_0=\int_0^x\left(\frac{1}{50}t+30\right)\mathrm{d}t+900=\frac{1}{100}x^2+30x+900,$$

故得平均成本函数为 $\overline{C}(x)=\dfrac{C(x)}{x}=\dfrac{1}{100}x+30+\dfrac{900}{x}$, $\overline{C}'(x)=\dfrac{1}{100}-\dfrac{900}{x^2}$.

令 $\overline{C}'=0$,得 $x_1=300(x_2=-300$ 舍去),因此,$\overline{C}(x)$仅有一个驻点 $x_1=300$. 再由实际问题本身可知 $\overline{C}(x)$有最小值. 故当产量为 300 吨时,平均成本最低.

2. 已知某产品生产 x 件时,边际成本 $C'(x)=0.4x-12$(元/件),固定成本 200 元. (1)求其成本函数. (2)若此种商品的售价为 20 元且可全部售出,求其利润函数 $L(x)$,并求产量为多少时所获得的利润最大.

解 由已知条件得 $C'(x)=0.4x-12, C(0)=200$. 因此生产 x 件商品的总成本为

$$C(x)=\int_0^x C'(t)\mathrm{d}t+C(0)=\int_0^x(0.4t-12)\mathrm{d}t+200=0.2x^2-12x+200(\text{元}).$$

销售收入为 $R(x)=20x$(元)

$$L(x)=R(x)-C(x)=20x-(0.2x^2-12x+200)=-0.2x^2+32x-200(\text{元}).$$

令 $L'(x)=-0.4x+32=0$,得唯一个驻点 $x=80$. 又 $L''(x)=-0.4$,所以当 $x=80$ 时所得到的利润最大,最大利润为 $L(80)=-0.2\times80^2+32\times80-200=1080$ 元.

3. 某种商品的成本函数 $C(x)$(万元),其边际成本为 $C'(x)=1$,边际收益是生产量 x(百台)的函数,即 $R'(x)=5-x$. (1)求生产量为多少时,总利润最大? (2)从利润量最大的生产量又生产了 100 台,总利润减少了多少

解 (1) 当 $R'(x)=C'(x)$ 时,利润最大,即当 $5-x=1, x=4$ 时,总利润最大.

(2) $\Delta L=\int_4^5 R'(x)\mathrm{d}x-\int_4^5 C'(x)\mathrm{d}x=\int_4^5(5-x-1)\mathrm{d}x=\int_4^5(4-x)\mathrm{d}x=-0.5$,所以总利润减少 0.5 万元.

4. 已知对某商品的需求量是价格 P 的函数,且边际需求 $Q'(P)=-4$,该商品的最大需求量为 80(即 $P=0$ 时,$Q=80$),求需求量与价格的函数关系.

解 由边际需求的不定积分公式,可得需求量

$$Q(P)=\int Q'(P)\mathrm{d}P=\int-4\mathrm{d}P=-4P+C\quad(C\text{ 为积分常数}).$$

代入 $Q(P)\big|_{P=0}=80$,得 $C=80$,于是需求量与价格的函数关系是 $Q(P)=-4P+80$.

本例也可由变上限的定积分公式直接求得

$$Q(P)=\int_0^P Q'(t)\mathrm{d}t+Q(0)=\int_0^P(-4)\mathrm{d}P+80=-4P+80.$$

提高题

1. 若一企业生产某产品的边际成本是产量 x 的函数 $C'(x)=2\mathrm{e}^{0.2x}$,固定成本 $C_0=90$,求总成本函数.

解 由定积分得 $C(x)=\int_0^x C'(x)\mathrm{d}x+90=\dfrac{2}{0.2}\mathrm{e}^{0.2x}\Big|_0^x+90=10\mathrm{e}^{0.2x}+80$,于是总成本函数为$C(x)=10\mathrm{e}^{0.2x}+80$.

2. 有一个大型投资项目,投资成本为 $A=10000$(万元),投资年利率为 5%,每年的均匀收入率为 $a=2000$(万元),求该投资为无限期时的纯收入的贴现值(或称为投资的资本价值).

解 由已知条件收入率为 $a=2000$(万元),年利率 $r=5\%$,故无限期的投资的总收入的贴现值为

$$y=\int_0^{+\infty}a\,\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}2000\mathrm{e}^{-0.05t}\mathrm{d}t=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b 2000\mathrm{e}^{-0.05t}\mathrm{d}t=\lim_{b\to+\infty}\frac{2000}{0.05}[1-\mathrm{e}^{-0.05b}]$$

$$=2000\times\frac{1}{0.05}=40000(\text{万元}),$$

从而投资为无限期时的纯收入贴现值为

$$R = y - A = 40000 - 10000 = 30000(\text{万元}) = 3 \text{ 亿元}.$$

总复习题 5

1. 填空题

(1) 设 $f(x)$ 为连续函数，则 $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x + \int_3^1 f(u)\mathrm{d}u + \int_1^2 f(t)\mathrm{d}t =$ ________.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin^2 t\mathrm{d}t}{x^3} =$ ________.

(3) 函数 $F(x) = \int_1^x (1-\ln\sqrt{t})\mathrm{d}t\ (x>0)$ 的递减区间为________.

(4) 已知 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1, f(1) = 0$，则 $\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x =$ ________.

(5) 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$，$a$ 为常数，$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+a} f(x)\mathrm{d}x =$ ________.

解 (1) 0； (2) $\dfrac{1}{3}$； (3) $[\mathrm{e}^2, +\infty)$； (4) -1； (5) a.

2. 选择题

(1) 在下列积分中，其值为 0 的是(　　).

A. $\int_{-1}^1 |\sin 2x|\mathrm{d}x$　　B. $\int_{-1}^1 \cos 2x\mathrm{d}x$　　C. $\int_{-1}^1 x\sin x\mathrm{d}x$　　D. $\int_{-1}^1 \sin 2x\mathrm{d}x$

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负，在 (a,b) 内 $f''(x)>0, f'(x)<0$. $I_1 = \dfrac{b-a}{2}[f(b)+f(a)]$，$I_2 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$I_3 = (b-a)f(b)$，则 I_1, I_2, I_3 的大小关系为(　　).

A. $I_1 \leqslant I_2 \leqslant I_3$　　B. $I_2 \leqslant I_3 \leqslant I_1$　　C. $I_1 \leqslant I_3 \leqslant I_2$　　D. $I_3 \leqslant I_2 \leqslant I_1$

(3) 设 $\Phi(x) = \int_0^x \sin(x-t)\mathrm{d}t$，则 $\Phi'(x)$ 等于(　　).

A. $\cos x$　　B. $-\sin x$　　C. $\sin x$　　D. 0

(4) 定积分 $\int_{-1}^1 x^{2002}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x$ 的值为(　　).

A. 0　　B. $2002!\left(\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$　　C. $2003!\left(\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$　　D. $2001!\left(\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$

(5) 设 $f(x) = \int_0^{\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t$，$g(x) = x^3 + x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　)无穷小量.

A. 等价　　B. 同阶但非等价　　C. 高阶　　D. 低阶

解 (1) D； (2) D； (3) C； (4) A； (5)B.

3. 求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^n \dfrac{n}{n^2+3k^2}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 连续；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{2x}^0 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x - 1}$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{n}{n^2+3k^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{1}{1+3\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}\dfrac{1}{n} = \int_0^1\dfrac{1}{1+3x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{3}x\Big|_0^1 = \dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n\sqrt{1+\dfrac{i}{n}} = \int_0^1\sqrt{1+x}\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \dfrac{2}{3}[2\sqrt{2}-1]$.

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\left(x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'}{(x-a)'} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x)}{1} = af(a)$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_{2x}^{0}e^{-t^2}dt}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2e^{-4x^2}}{e^x}=-2$.

4. 估计积分$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\dfrac{\sin x}{x}dx$ 的值.

解　$f(x)=\dfrac{\sin x}{x},x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right],f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\dfrac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0$,

$f(x)$ 在$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调下降,故区间端点即为极值点.

$M=f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi},m=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{\pi}$,因为 $b-a=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$, 所以

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4},\quad \text{即}\quad \frac{1}{2}\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5. 求下列函数的导数:

(1) $\dfrac{d}{dx}\int_0^x\sin(x-t)^2dt$;　　(2) $\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt$,其中 $f(x)$ 是连续函数.

解　(1) 设 $u=x-t$,则 $du=-dt$,$\int_0^x\sin(x-t)^2dt=-\int_x^0\sin u^2du$, 故

$$\frac{d}{dx}\int_0^x\sin(x-t)^2dt=-\frac{d\left(\int_x^0\sin u^2du\right)}{dx}=\sin x^2.$$

(2) 设 $u=x^2-t^2$,则 $du=-2tdt$,$\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=-\dfrac{1}{2}\int_{x^2}^0f(u)du=\dfrac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)du$, 故

$$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=\frac{1}{2}\frac{d\left(\int_0^{x^2}f(u)du\right)}{dx}=xf(x^2).$$

6. 设函数 $y=y(x)$ 由方程$\int_0^{y^2}e^{-t}dt+\int_x^0\cos t^2dt=0$ 所确定,求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解　在方程两边同时对 x 求导得 $\dfrac{d}{dx}\left(\int_0^{y^2}e^{-t}dt\right)+\dfrac{d}{dx}\left(\int_x^0\cos t^2dt\right)=0$, 于是

$$\frac{d}{dy}\left(\int_0^{y^2}e^{-t}dt\right)\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{d}{dx}\left(\int_x^0\cos t^2dt\right)=0,$$

即 $e^{-y^2}\cdot(2y)\cdot\dfrac{dy}{dx}+(-\cos x^2)=0$,故$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^{y^2}\cos x^2}{2y}(y\neq0)$.

7. 设 $f(x)$ 连续且满足$\int_0^{x^2(1+x)}f(t)dt=x$,求 $f(2)$.

解　把$\int_0^{x^2(1+x)}f(t)dt=x$ 两边对 x 求导得 $f(x^2(1+x))(2x+3x^2)=1$.

令 $x=1$ 得 $f(2)(2+3)=1$,即 $f(2)=\dfrac{1}{5}$.

8. 已知 $f(x)=x^2-x\int_0^2f(x)dx+2\int_0^1f(x)dx$,求 $f(x)$.

解　原等式两端分别从 0 到 1 和从 0 到 2 积分得 $\left(\text{注意}\int_0^2f(x)dx,\int_0^1f(x)dx\ \text{是常数}\right)$

$$\int_0^1f(x)dx=\int_0^1x^2dx-\int_0^1xdx\cdot\int_0^2f(x)dx+2\int_0^1f(x)dx,$$

$$\int_0^2f(x)dx=\int_0^2x^2dx-\int_0^2xdx\cdot\int_0^2f(x)dx+4\int_0^1f(x)dx,$$

即

$$\int_0^1f(x)dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\int_0^2f(x)dx+2\int_0^1f(x)dx,\quad\int_0^2f(x)dx=\frac{8}{3}-2\int_0^2f(x)dx+4\int_0^1f(x)dx.$$

从以上两式可解得 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}$，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{4}{3}$，故 $f(x) = x^2 - \dfrac{4}{3}x + \dfrac{2}{3}$.

9．设 $F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t, x \in (-\infty, +\infty)$，求曲线 $y = F(x)$ 在拐点处的切线方程.

解 $F'(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$，$F''(x) = x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$，令 $F''=0$ 得拐点 $(0,0)$，从而得切线斜率为 $k=1$，切线方程为 $y=x$.

10．设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为 $[a,b]$ 上的连续函数，证明：至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使

$$f(\xi)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x = g(\xi)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 设 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \cdot \int_x^b g(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 在 (a,b) 内可导，且

$$F(a) = F(b) = 0, \quad F'(x) = f(x)\int_x^b g(t)\mathrm{d}t - g(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

由罗尔定理，存在 $\xi \in (a,b)$，有 $F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x = g(\xi)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$.

11．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续且 $f(x)>0$. 证明函数 $F(x) = \dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调增加函数.

证明 因为 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = xf(x)$，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$，所以

$$F'(x) = \frac{xf(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - f(x)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2} = \frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}.$$

因为 $f(x)>0(x>0)$，所以 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t>0$，同理 $\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t>0$，故得 $F'(x)>0(x>0)$，即 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调增加函数.

12．求下列定积分：

(1) $\int_0^\pi (\sin^2 x - \sin^3 x)\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^3 \dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$； (3) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{8-2x^2}\,\mathrm{d}x$； (4) $\int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int_0^\pi (\sin^2 x - \sin^3 x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \dfrac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x + \int_0^\pi (1-\cos^2 x)\mathrm{d}\cos x$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\Big|_0^\pi + \left(\cos x - \frac{\cos^3 x}{3}\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}.$$

(2) $\int_0^3 \dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\int_0^3 \dfrac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} = 2\arctan\sqrt{x}\Big|_0^3 = \dfrac{2}{3}\pi$.

(3) 设 $x = 2\sin t$，则 $\mathrm{d}x = 2\cos t\mathrm{d}t$，于是

$$原式 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{2}\cos t \cdot 2\cos t\mathrm{d}t = 8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\mathrm{d}t = 8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$= 8\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\sin 2t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) = \sqrt{2}(\pi+2).$$

(4) $\int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2-x}\right) = \left[\ln(1+x)\dfrac{1}{2-x}\right]\Big|_0^1 - \int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(2-x)}\mathrm{d}x$

$$= \ln 2 - \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x}\right)\mathrm{d}x = \ln 2 - \frac{1}{3}\ln\left|\frac{1+x}{2-x}\right|\Big|_0^1$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{3}\left(\ln 2 - \ln\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\ln 2.$$

13. 设 $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2} dx = A$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{x+1} dx$.

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{x+1} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{x+1} dx \overset{x=\frac{t}{2}}{\underset{dx=\frac{1}{2}dt}{=\!=\!=}} \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\frac{t}{2}+1} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+2} dt$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{t+2} d(-\cos t) = \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos t}{t+2}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\cos t}{(t+2)^2} dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi+2} + \frac{1}{2} - A\right).$$

14. 设 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，则 $\int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^a [f(x)+f(2a-x)] dx$.

证明 $\int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_a^{2a} f(x) dx$. 令 $x = 2a-u$，则 $dx = -du$，于是

$$\int_a^{2a} f(x) dx = \int_0^a f(2a-u) du = \int_0^a f(2a-x) dx,$$

故 $\int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^a [f(x)+f(2a-x)] dx$.

15. 证明 $\int_x^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{1+x^2} (x>0)$.

证明 令 $x = \frac{1}{u}$，则 $dx = -\frac{1}{u^2}du$，于是

$$\int_x^1 \frac{dx}{1+x^2} = -\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \frac{1}{u^2} du = -\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{du}{1+u^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{du}{1+u^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{1+x^2}.$$

16. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[-a,a]\,(a>0)$ 上连续，$g(x)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 满足条件 $f(x)+f(-x)=A$（A 为常数）.

(1) 证明：$\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = A\int_0^a g(x)dx$；

(2) 利用(1)结论计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx$.

证明 (1) 因为 $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)g(x)dx + \int_0^a f(x)g(x)dx$，在上式右端第一项中，设 $x=-t$，则 $dx=-dt$，于是 $\int_{-a}^0 f(x)g(x)dx = \int_a^0 f(-t)g(-t)(-dt) = \int_0^a f(-t)g(-t)dt$.

又 $g(x)$ 为偶函数，所以 $\int_{-a}^0 f(x)g(x)dx = \int_0^a f(-x)g(x)dx$，于是

$$\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = \int_0^a [f(-x)g(x)+f(x)g(x)]dx = \int_0^a [f(-x)+f(x)]g(x)dx = A\int_0^a g(x)dx.$$

(2) 因为 $g(x)=|\sin x|$ 是偶函数，设 $f(x)=\arctan e^x$，则

$$h(x) = f(x)+f(-x) = \arctan e^x + \arctan e^{-x}, \quad h'(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}} + \frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}} = 0,$$

故 $h(x)=c$（c 为常数）. 令 $x=0$，得 $h(x)=f(x)+f(-x)=\frac{\pi}{2}$，于是

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2}.$$

17. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，证明对任意实数 a，有 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$. 并求 $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$.

证明 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$.

对$\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$，令 $x=t+T$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$，于是$\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(t+T)\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$，故
$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^T f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$

$\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\mathrm{d}x=100\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\mathrm{d}x=100\int_0^{\pi}\sqrt{2}\sin x\mathrm{d}x=100\sqrt{2}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=200\sqrt{2}.$

18. 设 $f(x)$是以 π 为周期的连续函数，证明：$\int_0^{2\pi}(\sin x+x)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(2x+\pi)f(x)\mathrm{d}x.$

证明 $\int_0^{2\pi}(\sin x+x)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(\sin x+x)f(x)\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}(\sin x+x)f(x)\mathrm{d}x.$

令 $x=\pi+u$，则$\int_{\pi}^{2\pi}(\sin x+x)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}[\sin(\pi+u)+\pi+u]f(\pi+u)\mathrm{d}u.$

因为 $f(x)$以 π 为周期，所以

$$\int_{\pi}^{2\pi}(\sin x+x)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(-\sin u+\pi+u)f(u)\mathrm{d}u=\int_0^{\pi}(-\sin x+\pi+x)f(x)\mathrm{d}x,$$

故

$$\int_0^{2\pi}(\sin x+x)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(\sin x+x)f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}(-\sin x+\pi+x)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(2x+\pi)f(x)\mathrm{d}x.$$

19. 设 $f(x)$，$g(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的连续函数，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，证明：至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使下列等式成立$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. 这一结果称为积分第一中值定理.

证明 不妨设在$[a,b]$ 上 $g(x)\geqslant 0$，因为 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，必有最大值 M，最小值 m，所以

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x)，且\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

上式两边积分得 $\int_a^b mg(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b Mg(x)\mathrm{d}x$，即

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

当 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x>0$ 时，有 $m\leqslant\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\leqslant M$，记 $\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}=\mu$，则有 $m\leqslant\mu\leqslant M$. 因为 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，由介值定理必有 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\mu$，即$\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}=f(\xi)$，所以

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

当 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$ 时，有 $g(x)=0$，$x\in[a,b]$，于是$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$，在$[a,b]$ 上任取一点 ξ，都有$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

综上可得$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x(a\leqslant\xi\leqslant b)$. 同理可证 $g(x)\leqslant 0$ 的情形.

20. 已知$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$，求$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\sin^2 x\mathrm{d}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\dfrac{2\sin x\cos x}{x}\mathrm{d}x$

$$=0+\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}\mathrm{d}x\xlongequal[\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t]{x=\frac{t}{2}}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\frac{t}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

21. 判断积分$\int_{2/\pi}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$的收敛性.

解 原式 $=-\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{\frac{2}{\pi}}^{b}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\frac{2}{\pi}}^{b}$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{b}-\cos\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

故收敛.

22. 判断积分$\int_0^3\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}}$的收敛性.

解 因为 $x=1$ 为瑕点,则$\int_0^3\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}}+\int_1^3\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}}$.

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}}=\frac{1}{1-2/3}(x-1)^{1/3}\Bigg|_0^1=3,\quad \int_1^3\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}}=\frac{1}{1-2/3}(x-1)^{1/3}\Bigg|_1^3=3\sqrt[3]{2},$$

所以$\int_0^3\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}}=3(1+\sqrt[3]{2})$,故收敛.

23. 求抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 及其在点$(0,-3)$和$(3,0)$处的切线所围成的图形的面积.

解 画草图 5-22. 因为 $y'(0)=4$,$y'(3)=-2$,曲线在$(0,-3)$处的切线方程为 $y+3=4x$,即 $y=4x-3$,曲线在$(3,0)$处的切线方程为 $y=-2(x-3)$,即 $y=-2x+6$.

由$\begin{cases}y=4x-3,\\ y=-2x+6\end{cases}$得两切线的交点为$\left(\frac{3}{2},3\right)$,则所求面积为

$$A=\int_0^{\frac{3}{2}}[4x-3-(-x^2+4x-3)]\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^3[-2x+6-(-x^2+4x-3)]\mathrm{d}x.$$

$$=\int_0^{\frac{3}{2}}x^2\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^3(x^2-6x+9)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right)\Bigg|_{\frac{3}{2}}^3=\frac{9}{4}.$$

24. 求曲线 $y=-x^3+x^2+2x$ 与 x 轴所围成的图形的面积.

解 画草图 5-23. $A=-\int_{-1}^0(-x^3+x^2+2x)\mathrm{d}x+\int_0^2(-x^3+x^2+2x)\mathrm{d}x=\frac{37}{12}$.

25. 求位于曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 下方,该曲线过原点的切线的左方以及 x 轴上方之间的图形的面积.

解 画草图 5-24. 设 $y=\mathrm{e}^x$ 的过原点的切线为 $y=kx$,切点为 $A(x_0\,y_0)$. 则 $k=y'(x_0)=\mathrm{e}^x|_{x=x_0}=\mathrm{e}^{x_0}$,切线为 $y=\mathrm{e}^{x_0}x$. 将$(x_0\,y_0)$代入 $y=\mathrm{e}^x$ 和 $y=\mathrm{e}^{x_0}x$ 有 $y_0=\mathrm{e}^{x_0}=\mathrm{e}^{x_0}x_0$. 从而 $x_0=1$,故 $k=\mathrm{e}$,所以

$$A=\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^1(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\Big|_{-\infty}^0+\left(\mathrm{e}^x-\frac{\mathrm{e}x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\mathrm{e}^x\Big|_{-\infty}^1-\frac{\mathrm{e}x^2}{2}\Bigg|_0^1=\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

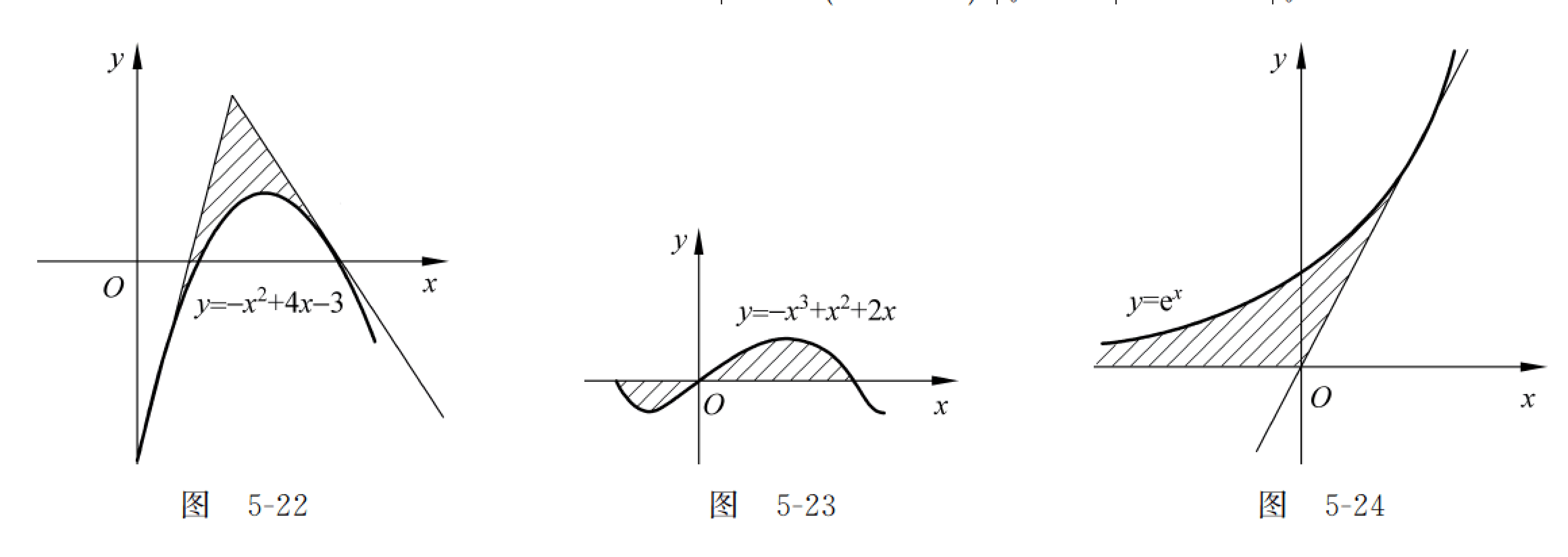


图 5-22　　图 5-23　　图 5-24

26. 求由下列已知曲线所围成的图形,按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积:

(1) $y=\mathrm{e}^x$ 与 $x=1$,$y=1$ 所围成的图形,分别绕 x 轴,y 轴;

(2) $x^2+(y-5)^2\leqslant 16$,绕 x 轴.

解 (1) 画草图 5-25(a).

$$V_x=\pi\int_0^1(e^x)^2dx-\pi=\frac{1}{2}\pi(e^2-3),$$

$$V_y=\pi(e-1)-\pi\int_1^e(\ln y)^2dy=\pi(e-1)-\pi\left[(\ln y)^2y\Big|_1^e-2\int_1^e\ln y dy\right]$$

$$=\pi(e-1)-\pi\left[e-2y\ln y\Big|_1^e+2\int_1^e dy\right]=\pi(e-1)-\pi[e-2e+2e-2]=\pi.$$

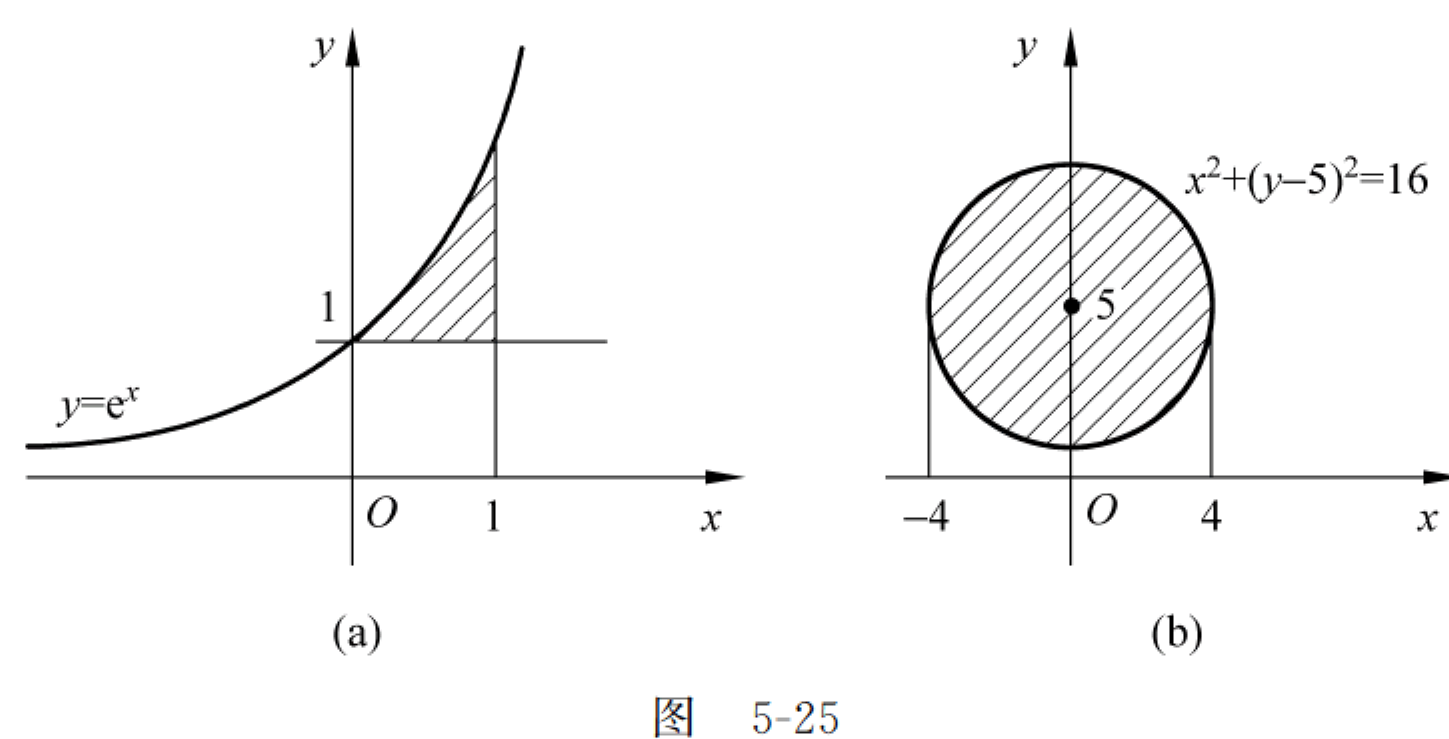


图 5-25

(2) 画草图 5-25(b).

$$V_x=\pi\int_{-4}^4\left(5+\sqrt{16-x^2}\right)^2dx-\pi\int_{-4}^4\left(5-\sqrt{16-x^2}\right)^2dx=20\pi\int_{-4}^4\sqrt{16-x^2}dx$$

$$=20\pi\cdot\frac{\pi 4^2}{2}=160\pi^2.$$

27. 求曲线 $y=4-x^2$ 及 $y=0$ 所围成的图形绕直线 $x=3$ 旋转所得旋转体的体积.

解 画草图 5-26,取 y 为积分变量,$y\in[0,4]$. 由前面常用的方法,所求体积为曲边梯形 $ABDE$ 绕 $x=3$ 旋转所得旋转体的体积 V_2 减去由曲边梯形 $ACDE$ 绕 $x=3$ 旋转所得旋转体的体积 V_1,其体积元素分别为

$$dV_2=\pi\left(3+\sqrt{4-y}\right)^2dy,\quad dV_1=\pi\left(3-\sqrt{4-y}\right)^2dy.$$

所求体积为

$$V=V_2-V_1=\pi\int_0^4\left(3+\sqrt{4-y}\right)^2dy-\pi\int_0^4\left(3-\sqrt{4-y}\right)^2dy$$

$$=12\pi\int_0^4\sqrt{4-y}dy=64\pi.$$

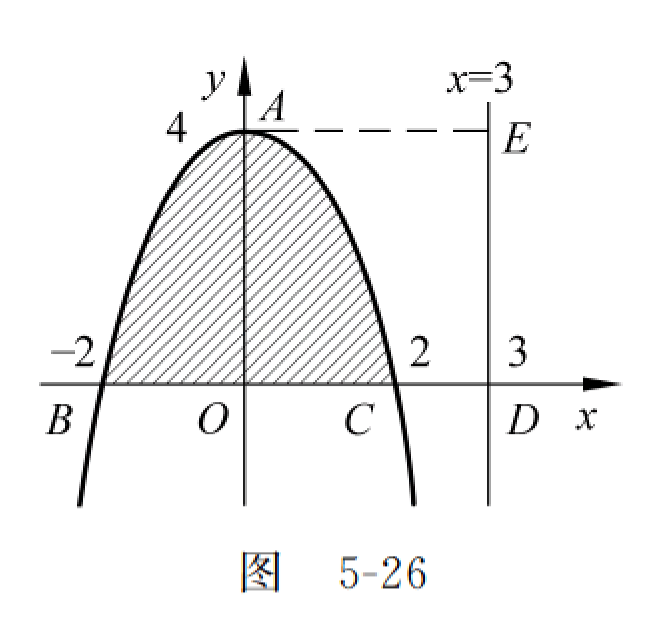


图 5-26

注 (1) 此题的旋转轴不是 y 轴,而是直线 $x=3$,因此,在确定体积元素 dV 时,旋转半径不是曲边到 y 轴的距离,而是曲边到直线 $x=3$ 的距离.

(2) 此题也可看成平行截面面积为已知的立体的情况. 解法如下:

过 y 轴上一点 $y(0<y<4)$ 作垂直于 y 轴的平行截面,截得一个圆环面,其面积为

$$A(y)=\pi(3-x_2)^2-\pi(3-x_1)^2=\pi\left(3+\sqrt{4-y}\right)^2-\pi\left(3-\sqrt{4-y}\right)^2$$

$$=12\pi\sqrt{4-y},$$

所求体积为 $V=\int_0^4A(y)dy=\int_0^4 12\pi\sqrt{4-y}dy=64\pi.$

28. 设抛物线 $L:y=-bx^2+a(a>0,b>0)$,确定常数 a,b 的值,使得

(1) L 与直线 $y=x+1$ 相切;

(2) L 与 x 轴所围图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积最大.

解 (1) 设切点为$(x_0,1+x_0)$. 因为 $y'=-2bx$,所以 $-2bx_0=1$,又$(x_0,1+x_0)$在抛物线上,所以 $1+x_0=$

$-bx_0^2+a$，由 $\begin{cases}-2bx_0=1,\\1+x_0=-bx_0^2+a\end{cases}$，解得 $a=1-\dfrac{1}{4b}$.

(2) L 与 x 轴所围图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积为

$$V=\int_0^a \pi\frac{a-y}{b}\mathrm{d}y=\int_0^a \pi 4(1-a)(a-y)\mathrm{d}y=4\pi(1-a)\frac{a^2}{2}=2\pi a^2(1-a),$$

$$V'=-2\pi(3a^2-2a)，令\ V'=0，得\ a=\frac{2}{3}，于是\ b=\frac{3}{4}.$$

29. 已知生产某产品 x 单位时的边际收入为 $R'(x)=100-2x$(元/单位)，求生产 40 单位时的总收入及平均收入，并求再增加生产 10 个单位时所增加的总收入.

解　由变上限定积分公式 $R(x)=\int_0^x R'(t)\mathrm{d}t$ 直接求出

$$R(40)=\int_0^{40}(100-2x)\mathrm{d}x=(100x-x^2)\Big|_0^{40}=2400(元),$$

平均收入 $\dfrac{R(40)}{40}=\dfrac{2400}{40}=60$(元).

在生产 40 单位后再生产 10 单位所增加的总收入可由增量公式求得

$$\Delta R=R(50)-R(40)=\int_{40}^{50}R'(x)\mathrm{d}x=\int_{40}^{50}(100-2x)\mathrm{d}x=(100x-x^2)\Big|_{40}^{50}=100(元).$$

30. 已知某产品的边际收入 $R'(x)=25-2x$，边际成本 $C'(x)=13-4x$，固定成本为 $C_0=10$，求当 $x=5$ 时的毛利和纯利.

解　方法一　由边际利润 $L'(x)=R'(x)-C'(x)=(25-2x)-(13-4x)=12+2x$.

可求得 $x=5$ 时的毛利为 $\int_0^x L'(t)\mathrm{d}t=\int_0^5(12+2t)\mathrm{d}t=(12t+t^2)\Big|_0^5=85$；

当 $x=5$ 时的纯利为 $L(5)=\int_0^5 L'(t)\mathrm{d}t-C_0=85-10=75$.

方法二　总收入　$R(5)=\int_0^5 R'(t)\mathrm{d}t=\int_0^5(25-2t)\mathrm{d}t=(25t-t^2)\Big|_0^5=100$，

总成本　$C(5)=\int_0^5 C'(t)\mathrm{d}t+C_0=\int_0^5(13-4t)\mathrm{d}t+10=(13t-2t^2)\Big|_0^5+10=25$，所以纯利为

$$L(5)=R(5)-C(5)=100-25=75,$$

毛利　$L(5)+C_0=75+10=85$.

31. 已知需求函数 $D(Q)=(Q-5)^2$ 和消费函数 $S(Q)=Q^2+Q+3$. 求：

(1) 平衡点；(2) 平衡点处的消费者剩余；(3) 平衡点处的生产者剩余.

解　(1) 为了求平衡点，令 $D(Q)=S(Q)$，并求解如下方程 $(Q-5)^2=Q^2+Q+3$，解之得 $Q=2$，即 $Q^*=2$. 把 $Q=2$ 代入 $D(Q)$，则 $P^*=D(2)=(2-5)^2=9$，因此，平衡点是(2,9).

(2) 平衡点处的消费者剩余是

$$\int_0^{Q^*}D(Q)\mathrm{d}Q-P^*Q^*=\int_0^2(Q-5)^2\mathrm{d}Q-2\cdot 9=\frac{(Q-5)^3}{3}\Big|_0^2-18=\frac{44}{3}\approx 14.67.$$

(3) 平衡点处的生产者剩余是

$$P^*Q^*-\int_0^{Q^*}S(Q)\mathrm{d}Q=2\times 9-\int_0^2(Q^2+Q+3)\mathrm{d}Q=18-\left(\frac{Q^3}{3}+\frac{Q^2}{2}+3Q\right)\Big|_0^2=\frac{22}{3}\approx 7.33.$$

自测题 5 答案

1. **解**　(1) $\int_a^b f'(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f'(2x)\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}f(2x)\Big|_a^b=\frac{1}{2}[f(2b)-f(2a)]$；

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3+\sqrt{1+\cos^4 x}\sin x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^4 x}\sin x\mathrm{d}x=3\pi+0=3\pi$；

(3) $\frac{d}{dx}\left(\int_{x^2}^{0} x\cos t\,dt+\int_0^1 t\cos t\,dt\right)=\frac{d}{dx}\left(x\int_{x^2}^{0}\cos t\,dt\right)=\int_{x^2}^{0}\cos t\,dt-2x^2\cos x$

$$=\sin t\Big|_{x^2}^{0}-2x^2\cos x=-\sin x^2-2x^2\cos x^2;$$

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}dx=\int_0^{+\infty}\arctan x\,d\arctan x=\frac{(\arctan x)^2\Big|_0^{+\infty}}{2}=\frac{\pi^2}{8}$;

(5) $\int_0^{\frac{1}{c}}(x^2-cx^3)dx=\left(\frac{x^3}{3}-c\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^{\frac{1}{c}}=\frac{1}{12c^3}=\frac{2}{3}$，解得 $c=\frac{1}{2}$.

2. **解** (1) 因为 $3<x<4$ 时 $\ln x>1$，所以 $\ln^2 x<\ln^4 x$，故 $\int_3^4\ln^2 x\,dx<\int_3^4\ln^4 x\,dx$，即 $I_1<I_2$，故选 B.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2\,dt}{\sin^{10}x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2\,dt}{x^{10}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-2x\cos x^4}{10x^9}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^4}{5x^8}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^8}{5x^8}=\frac{1}{10},$$

所以 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶但非等价无穷小. 故选 B.

(3) $F'(x)=\left(\int_{x^2}^{e^{-x}}f(t)dt\right)'=-e^{-x}f(e^{-x})-2xf(x^2)$，故选 A.

(4) 设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{1}{f(t)}dt$，则 $F(a)=\int_b^a\frac{1}{f(t)}dt<0$，$F(b)=\int_a^b f(t)dt>0$，由零点存在定理得 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内的至少有一根，而 $F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}>0$，$F(x)$ 单调增，所以只有一根，故选 B.

(5) 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\int_a^b f(x)dx$ 存在. 但 $\int_a^b f(x)dx$ 存在，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不一定连续，有可能有有限个间断点. 故选 B.

3. **解** (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin^{\frac{3}{2}}t\,dt}{\int_0^x t(t-\sin t)dt}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin^3 x}{x(x-\sin x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{12x}{\sin x}=12.$

(2) 由于 $\sqrt{1+x^4}-1\sim\frac{1}{2}x^4$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)dt}{\sqrt{1+x^4}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)dt}{\frac{1}{2}x^4}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cos x}{2x^3}$$

$$\overset{\ln(1+u)\sim u}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cdot 2\sin x\cos x}{2x^3}=1.$$

4. **解** (1) $\int_0^4 xe^{\sqrt{x}}dx\overset{\sqrt{x}=t}{=\!=\!=}\int_0^2 t^2e^t 2t\,dt=2\int_0^2 t^3e^t\,dt=2\left(t^3e^t\Big|_0^2-3\int_0^2 t^2e^t\,dt\right)$

$$=2\left[8e^2-3\left(t^2e^t\Big|_0^2-2\int_0^2 te^t\,dt\right)\right]=16e^2-24e^2+12\int_0^2 te^t\,dt$$

$$=-8e^2+12(te^t-e^t)\Big|_0^2=4e^2+12.$$

(2) $\int_{-2}^2\frac{x+|x|}{2+x^2}dx=\int_{-2}^2\frac{x}{2+x^2}dx+\int_{-2}^2\frac{|x|}{2+x^2}dx=0+2\int_0^2\frac{x}{2+x^2}dx=\int_0^2\frac{d(2+x^2)}{2+x^2}$

$$=\ln(2+x^2)\Big|_0^2=\ln 6-\ln 2=\ln 3.$$

(3) $\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos x}\,dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\left|\cos^2 \frac{x}{2}\right| dx = \int_0^{\pi} \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}dx$

$$= 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} + \sin\frac{x}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) = 4\sqrt{2}.$$

5. 设 $t = x - 1$,则 $dx = dt$, 于是

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (1+t^2)dt + \int_0^1 e^{-t}dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{8} - e^{-x}\Big|_0^1 = \frac{37}{24} - \frac{1}{e}.$$

6. **解** 面积微元：(1) $x\in[-2,0]$, $dA_1 = (x^3-6x-x^2)dx$, (2) $x\in[0,3]$, $dA_2 = (x^2-x^3+6x)dx$. 故所求面积为 $A = \int_{-2}^{0} dA_1 + \int_0^3 dA_2 = \int_{-2}^{0}(x^3-6x-x^2)dx + \int_0^3 (x^2-x^3+6x)dx = \frac{253}{12}$.

7. **解** 解方程组求交点：$\begin{cases} y = 2 - x^2, \\ y = x, \end{cases}$ 得交点坐标 $A(1,1)$.

从而可求得绕 x 轴和绕 y 轴旋转所得的旋转体体积

$$V_x = \pi\int_0^1 (2-x^2)^2 dx - \pi\int_0^1 x^2 dx = \pi\int_0^1 (4-5x^2+x^4)dx = \pi\left(4x - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1 = \frac{38}{15}\pi,$$

$$V_y = \int_0^1 \pi y^2 dy + \int_1^2 \pi(2-y)dy = \frac{1}{3}\pi y^3\Big|_0^1 + \pi\left(2y - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{5}{6}\pi.$$

8. **解** $I'(x) = x(1+2\ln x)$, 令 $I'(x) = 0$, 得驻点 $x = 0$, $x = e^{-1/2} \approx 6.03$, 且 $I'(x)$ 在 $[1,e]$ 是恒大于 0, 故 $I(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调增加.

当 $x = 1$ 时, $I(x)$ 取最小值, 最小值为 $I(1) = 0$; 当 $x = e$ 时, $I(x)$ 取最大值, 最大值为 $I(e)$.

$$I(e) = \int_1^e t(1+2\ln t)dt = \int_1^e (t+2t\ln t)dt = \frac{1}{2}t^2\Big|_1^e + 2\left(\frac{1}{2}t^2\ln t\Big|_1^e - \frac{1}{4}t^2\Big|_1^e\right) = e^2,$$

即最大值 $I(e) = e^2$, 最小值 $I(1) = 0$.

9. **证明** 因为 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数, 所以 $\int_x^{x+2} f(t)dt = \int_0^2 f(t)dt$, 于是

$$\begin{aligned} G(x+2) &= 2\int_0^{x+2} f(t)dt - (x+2)\int_0^2 f(t)dt \\ &= 2\int_0^x f(t)dt + 2\int_x^{x+2} f(t)dt - x\int_0^2 f(t)dt - 2\int_0^2 f(t)dt \\ &= 2\int_0^x f(t)dt + 2\int_0^2 f(t)dt - x\int_0^2 f(t)dt - 2\int_0^2 f(t)dt \\ &= 2\int_0^x f(t)dt - x\int_0^2 f(t)dt = G(x), \end{aligned}$$

即 $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.